

# Verzweigungstheorie homokliner Verdopplungen

Von der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
genehmigte Abhandlung

von

Björn Sandstede  
geboren in Hannover

Hauptberichter: Prof. Dr. B. Fiedler  
Mitberichter: Prof. Dr. K. Kirchgässner  
Mitberichter: Prof. Dr. A. Mielke  
Tag der Einreichung: 15. März 1993  
Tag der mündlichen Prüfung: 3. Mai 1993

Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart

**1993**

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1. Vorbereitungen</b>	<b>7</b>
1.1 Exponentielle Dichotomien . . . . .	7
1.2 Gestörte lineare Gleichungen . . . . .	16
<b>2. Der geometrische Zugang: Zentrumsmannigfaltigkeiten</b>	<b>23</b>
2.1 Einführung . . . . .	23
2.2 Das Resultat . . . . .	25
2.3 Der Beweis . . . . .	27
2.3.1 Stabile und instabile Bündel . . . . .	29
2.3.2 Die Graphentransformation . . . . .	35
2.3.3 Regularität . . . . .	58
2.4 Diskussion . . . . .	69
<b>3. Der analytische Zugang: Lins Methode</b>	<b>71</b>
3.1 Einführung . . . . .	71
3.2 Vorbereitungen . . . . .	74
3.3 Die Reduktion . . . . .	81
3.3.1 Die Verzweigungsgleichungen . . . . .	81
3.3.2 Die Abschätzung der Restterme . . . . .	97
3.4 Diskussion . . . . .	110
<b>4. Anwendungen der geometrischen und analytischen Methode</b>	<b>111</b>
4.1 Verzweigungen mit Kodimension eins . . . . .	111
4.2 Verzweigungen mit Kodimension zwei . . . . .	113
4.2.1 Die Orbit-Flip Verzweigung . . . . .	113
4.2.2 Die resonante Verzweigung . . . . .	127
4.2.3 Verzweigungen mit nichthyperbolischen Gleichgewichten . . . . .	127
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>129</b>

# Einleitung

In dieser Arbeit werden gewöhnliche und teilweise auch parabolische parameterabhängige Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} + Ax = f(x, \mu) \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}^p$$

betrachtet. Ausgangspunkt ist ein zum Parameterwert  $\mu = \mu_0$  gegebener homokliner Orbit  $q_0(t)$ , d.h. eine Lösung, die  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q_0(t) = p_0$  für ein Gleichgewicht  $p_0$  erfüllt. Wir wollen nun die Dynamik in der Nähe dieser homoklinen Lösung bei kleinen Parameteränderungen untersuchen. Insbesondere sollen verzweigende rekurrente Orbits, also Lösungen, die für alle Zeiten in einer kleinen tubularen Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $q_0(t)$  bleiben, bestimmt werden.

Zunächst sind wohl einige Bemerkungen über die Motivation angebracht. Homokline Lösungen treten zum einen als travelling waves oder Solitonen auf. Dies sind Lösungen  $u(x, t) = v(x - ct)$  einer partiellen Differentialgleichung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $c$  bewegen, ohne ihre Form zu verändern. Damit können zum Beispiel Nervenreizleitungen, Wasserwellen oder allgemeiner Phasenübergänge modelliert werden, vergleiche [17] oder [27]. In diesem Zusammenhang interessiert man sich für das Entstehen anderer Solitonen mit mehreren Pulsen. Für die gewöhnliche Differentialgleichung, die die Dynamik der travelling waves beschreibt, bedeutet dies das Auftreten von sogenannten  $N$ -homoklinen Orbits, d.h. von neuen homoklinen Lösungen, die  $N$ -mal um den alten ursprünglich gegebenen Orbit herumlaufen. Das Verzweigen von 2-homoklinen Orbits wird in Analogie zur Periodenverdopplung als homokline Verdopplung bezeichnet.

Zum anderen sind homokline Orbits oft für die Anwesenheit von chaotischer Dynamik verantwortlich, siehe [18, 42]. Dabei verstehen wir unter Chaos das Vorhandensein von Shift-Dynamik in der Poincaré Abbildung. Insbesondere existieren dann  $N$ -periodische Lösungen für jedes  $N$  in der tubularen Umgebung  $\mathcal{U}$ . Hier sind  $N$ -periodische Orbits wiederum Lösungen, die  $N$ -mal um  $q_0(t)$  herumlaufen und periodisch sind.

Darüberhinaus stellen homokline Orbits die einfachste Möglichkeit dar, mit der periodische Lösungen verschwinden können: sie konvergieren im Phasenraum gegen den homoklinen Orbit, wobei gleichzeitig ihre Periode gegen unendlich strebt. Dies ist eine Verzweigung mit Kodimension eins, die auch “blue sky” Katastrophe genannt wird. Lokal treten dann die periodischen Orbit nach einer Seite von  $\mu_0$  im Parameterraum  $\mathbb{R}$  auf.

Nun soll ein kurzer Abriß über bekannte Resultate für gewöhnliche Differentialgleichungen gegeben werden. Alle diese Ergebnisse gelten, ohne das dies jedesmal erwähnt wird, nur für generische, d.h. typische, Vektorfelder.

Für Systeme mit nur einem Parameter (d.h.  $p = 1$ ) gilt nach Shilnikov [32, 33, 34, 35, 36, 37] die folgende Alternative:

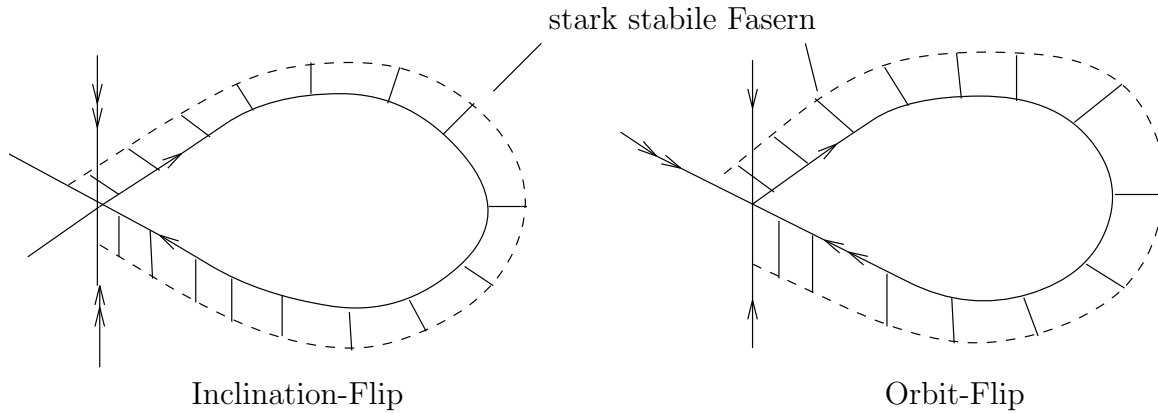


Abbildung 1: Verzweigungen mit Kodimension zwei

- es existiert genau ein periodischer hyperbolischer Orbit für  $\mu > \mu_0$  (oder  $\mu < \mu_0$ )
- für alle  $\mu$  nahe  $\mu_0$  gibt es Shift-Dynamik in  $\mathcal{U}$ .

Diese Alternative konnte in unendlich-dimensionalen Systemen bisher nicht gezeigt werden. Von X. B. Lin [29] wurde allerdings bewiesen, daß homokline Lösungen wieder von periodischen Orbits begleitet werden. Vergleiche dazu auch [6].

Die Verzweigungen mit Kodimension zwei (hier ist nun  $p = 2$ ) sind wesentlich reichhaltiger. Im folgenden beschränke ich mich dabei auf die Fälle, bei denen nur die reellen Eigenwerte der Linearisierung in der stationären Lösung  $p_0$  beteiligt sind, d.h. wo der homokline Orbit  $q_0(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  nicht oszilliert. Dann gibt es nach Yanagida [43] drei verschiedene Verzweigungen, die im folgenden kurz dargestellt werden sollen:

- resonante Verzweigung
- Inclination-Flip
- Orbit-Flip

Die resonante Verzweigung wird durch  $\lambda^s(\mu_0) = \lambda^u(\mu_0)$  charakterisiert, wobei  $-\lambda^s(\mu_0)$  und  $\lambda^u(\mu_0)$  die betragsmäßig kleinsten Eigenwerte im stabilen bzw. instabilen Teil des Spektrums der Linearisierung in  $p_0$  sind. Dieser Fall wurde von Chow et. al. [7] behandelt. Von Kisaka et. al. [28] wurde der Inclination-Flip untersucht. An dem zugehörigen Verzweigungspunkt endet der Existenzbereich der stark stabilen oder stark instabilen Faserung des homoklinen Orbits. Der Orbit-Flip schließlich tritt auf, wenn  $q_0(t) \in W^{ss}(p_0)$  ist, d.h. wenn der homokline Orbit von einer Seite der stark stabilen Mannigfaltigkeit auf die andere “umklappt”.

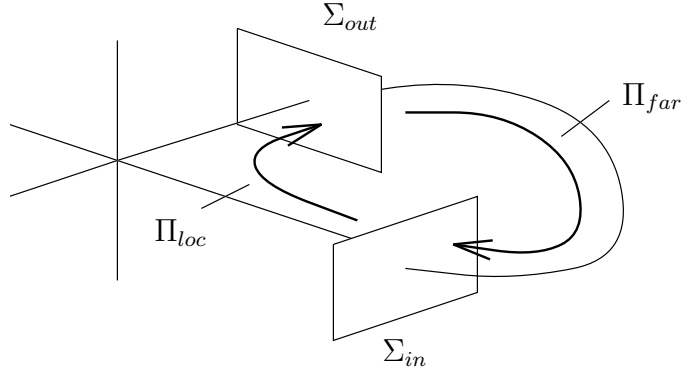


Abbildung 2: Poincaré Abbildung

Sowohl die resonante Verzweigung als auch der Inclination-Flip wurden durch eine genaue Untersuchung der Poincaré Abbildung gelöst. Dabei wird die Rückkehrabbildung  $\Pi$  in einen lokalen Teil  $\Pi_{loc}$  nahe dem Gleichgewicht und einer anderen Abbildung  $\Pi_{far}$  zerlegt.

Je nach Problemstellung werden anschließend Ljapunov-Schmidt Reduktionen oder zum Beispiel im  $\mathbb{R}^3$  mehr geometrische Argumente angewendet. Dies setzt aber voraus, daß man eine gute Darstellung von  $\Pi_{loc}$  hat. Für diese Abbildung sind Abschätzungen nicht einfach zu erhalten, da die Lösungen unbeschränkte Zeit von  $\Sigma_{in}$  nach  $\Sigma_{out}$  benötigen. Deshalb wird mit Linearisierungen oder “Quasilinearisierungen” wie den Shilnikov-Variablen gearbeitet. Linearisierungen sind aber nur unter erheblichen Voraussetzungen an das Vektorfeld möglich, während die Shilnikov-Variablen bei der Orbit-Flip Bifurkation nicht anwendbar sind, siehe [28].

In dieser Arbeit sollen nun zwei Methoden dargestellt werden, mit denen die oben erwähnten Probleme zumindest teilweise überwunden werden können.

Der erste Zugang ist geometrischer Natur. Für die Verzweigungstheorie stationärer oder periodischer Lösungen steht mit der Theorie der Zentrumsmannigfaltigkeiten ein Werkzeug bereit, mit dem zunächst hochdimensionale Probleme auf niedrigdimensionalere reduziert werden können. Dabei wird eine Fläche  $W^c$ , eben die Zentrumsmannigfaltigkeit, konstruiert, die bereits alle rekurrenten Lösungen enthält und darüberhinaus (lokal) invariant unter dem Fluß ist. Damit reduziert sich die Suche nach rekurrenten Orbits auf diese Fläche  $W^c$ . In [7] wurde nun ein ähnlicher Zugang auch für homokline Orbits vorgeschlagen: finde eine invariante Fläche  $W_{hom}^c$ , in der sich bereits alle rekurrente Dynamik widerspiegelt.

Hier wird nun eine derartige Mannigfaltigkeit konstruiert, allerdings unter Einschränkungen an das asymptotische Verhalten des homoklinen Orbits. Dieses Resultat gilt auch für diejenigen parabolischen Systeme, für die man Rückwärtseindeutigkeit der Lösungen nachweisen kann, insbesondere also für Reaktions-Diffusions Gleichungen oder für Systeme mit

analytischen Nichtlinearitäten. Beschränkt wird dieser Zugang durch die Tatsache, daß  $W_{hom}^c$  im allgemeinen nur in  $C^{1,\beta}$  liegt für ein  $\beta \in (0, 1]$  in Abhängigkeit von gewissen Spektrallücken.

Eine Anwendung des Resultates besteht darin, daß aufgrund der Dimension oder der topologischen Struktur von  $W_{hom}^c$  das Auftreten bestimmter Lösungen apriori ausgeschlossen werden kann. Betrachte zum Beispiel einen homoklinen Orbit an ein nichthyperbolisches Gleichgewicht. Ein Parameter steuere das Aufbrechen des homoklinen Orbits, der andere sei die Entfaltung einer saddle-node Bifurkation der stationären Lösung. Diese Verzweigung wurde in [9] und [14] untersucht. Hier erwartet man eine zweidimensionale invariante Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^c$ . Diese kann nun homöomorph zu einem Kreisring oder aber topologisch äquivalent zum Möbiusband sein. Deshalb schließt man, daß keine  $N$ -homoklinen oder  $N$ -periodischen Lösungen mit  $N \geq 2$  im ersten beziehungsweise  $N \geq 3$  im zweiten Fall existieren können. Dies verbessert ein Resultat in [14]. Den gleichen Schluß zieht man für die resonante Verzweigung, siehe [28]. Weiterhin macht diese Fläche die oben dargestellten Bifurkationen homokliner Orbits mit Kodimension zwei verständlicher. So finden im resonanten Fall alle Verzweigungen innerhalb der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^c$  statt; dies entspricht gewissermaßen der saddle-node Verzweigung (im Falle des Kreisrings) von periodischen Orbits beziehungsweise der Periodenverdopplung (beim Möbiusband). Dagegen verzweigt sowohl im Inclination-Flip wie auch im Orbit-Flip diese zweidimensionale Fläche selbst innerhalb der dann dreidimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit: sie wechselt den topologischen Typ von Kreisring zu Möbiusband, vergleiche Abbildung 3.

Dies hat keine Entsprechung in der Verzweigungstheorie periodischer Orbits, wo ein derartiger Wechsel nur “kontinuierlich” passieren kann.

Unabhängig von mir wurde von Brunovský [4] und Homburg [25] der Spezialfall einer zweidimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit behandelt. Beide Autoren benötigen die Hyperbolizität des Gleichgewichts  $p_0$ . Darüberhinaus scheint das Resultat von Brunovský nur für Gleichungen ohne Parameter zu gelten. Das Ergebnis von Homburg erlaubt parameter-

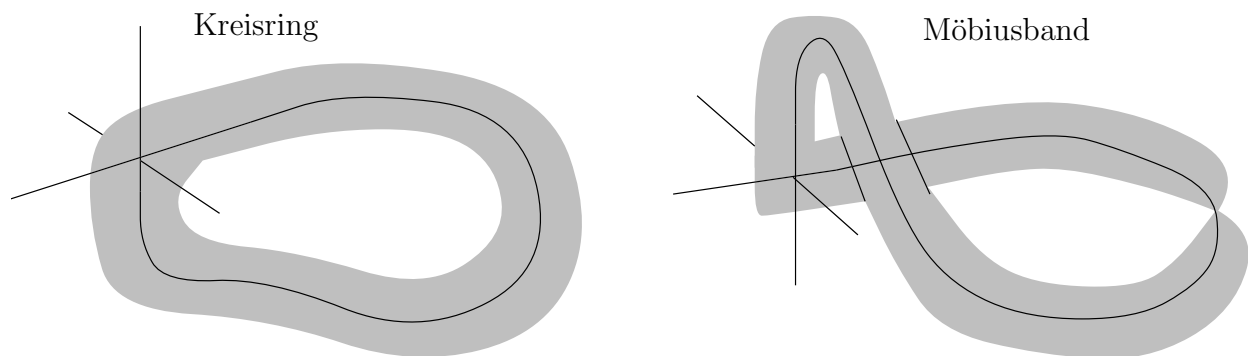


Abbildung 3: Typwechsel

abhängige Gleichungen, dort wird aber zusätzlich die Kontraktionseigenschaft  $|\lambda^s(\mu_0)| \neq \lambda^u(\mu_0)$  benötigt.

Der zweite - analytische - Zugang wurde von X. B. Lin in [29] für Systeme mit im wesentlichen einem Parameter entwickelt. Diese der Ljapunov-Schmidt Reduktion verwandte Methode vereinheitlicht die Behandlung von periodischen und homoklinen Lösungen, indem die übliche Melnikov-Methode so verallgemeinert wird, daß damit auch verzweigende periodische Orbits erfaßt werden. Hier soll nun Lins Zugang so modifiziert und verallgemeinert werden, daß damit auch Probleme höherer Kodimension, insbesondere also Bifurkationen mit Kodimension zwei, behandelt werden können.

Anschließend wenden wir diesen letzten Zugang auf die Orbit-Flip Bifurkation an. Für einen durch die stark stabile Mannigfaltigkeit umklappenden homoklinen Orbit müssen wir in Abhängigkeit von gewissen Relationen der beteiligten Eigenwerte  $-\lambda^{ss}(\mu_0) < -\lambda^s(\mu_0) < 0$  und  $\lambda^u(\mu_0) > 0$  in einem generischen Vektorfeld drei Fälle unterscheiden.

Für  $\lambda^u(\mu_0) < \lambda^s(\mu_0)$  ist die Poincaré Abbildung in  $W_{hom}^c$  eine Kontraktion. Deshalb findet nur eine suspendierte “blue sky” Katastrophe, d.h. die Verzweigung eines 1-periodischen Orbits lokal nach einer Seite des homoklinen Pfades, statt. Dagegen kann für  $\lambda^s(\mu_0) < \lambda^u(\mu_0) < \lambda^{ss}(\mu_0)$  eine homokline Verdopplung nachgewiesen werden. Die dritte Relation  $\lambda^{ss}(\mu_0) < \lambda^u(\mu_0)$  impliziert schließlich die Anwesenheit von Shift-Dynamik und von  $N$ -homoklinen Orbits für jedes  $N \geq 1$ .

Bisher wurde diese Verzweigung von Yanagida [43] und Terman [39] untersucht. In [43] wurde die zusätzliche Voraussetzung  $\dim W^u(p_0) = 1$  benötigt und darüberhinaus wurden dort nur die ersten beiden genannten Fälle behandelt. In [39] wurden speziell singular gestörte Systeme im  $\mathbb{R}^3$  in einer dem dritten Fall entsprechenden Situation betrachtet.

**Danksagung.** Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Bernold Fiedler für die Betreuung, Ratschläge und die Unterstützung beim Entstehen dieser Arbeit. Den Herren Christian Leis und Arnd Scheel danke ich für fruchtbare Diskussionen und Anregungen. Mein besonderer Dank gilt Frau Jasmin Cantner für zahlreiche Diskussionen.

**Unterstützung.** Diese Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) über das Graduiertenkolleg “Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen” an der Universität Stuttgart gefördert.

# 1. Vorbereitungen

In diesem vorbereitenden Kapitel sollen einige Hilfsmittel für die späteren Abschnitte bereit gestellt werden, um dort den Gedankengang nicht unterbrechen zu müssen.

## 1.1 Exponentielle Dichotomien

Es werden stets die folgenden Annahmen zugrunde gelegt.

(A)  $X$  sei ein Banachraum,  $A : X \rightarrow X$  sei ein sektorieller Operator in  $X$  mit dichtem Definitionsbereich.

Eine Referenz für die Definitionen ist [23, ch. 1.3]. Weiterhin bezeichne stets  $X^\alpha$  den Definitionsbereich von  $A^\alpha$  versehen mit der Graphennorm, vergleiche wieder [23, ch. 1.4].

Betrachte nun die lineare Differentialgleichung in  $X^\alpha$  gegeben durch

$$(1.1) \quad \dot{x} + Ax = B(t)x, \quad x_0 \in X^\alpha$$

mit  $B(\cdot) \in C^0(J, L(X^\alpha, X))$  lokal Hölderstetig in  $t$  und  $J = [t_0, \infty)$  beziehungsweise  $J = (-\infty, t_0]$ . Mit  $T(t, s)$  definiert für  $t \geq s \in J$  bezeichnen wir dann den zugehörigen Halbfluß, vergleiche [23, ch. 7.1].

**Definition.** Gleichung (1.1) hat eine exponentielle Dichotomie auf dem Intervall  $J$ , wenn Projektionen  $P(\cdot) : J \rightarrow L(X^\alpha)$  und Konstanten  $K, \lambda^s$  und  $\lambda^u$  alle ungleich 0 mit  $\lambda^s + \lambda^u > 0$  existieren, so daß für  $t \geq s \in J$  gilt:

- (i)  $T(t, s)P(s) = P(t)T(t, s)$ .
- (ii)  $T(t, s)|_{\mathbb{R}(1-P(s))}$  ist invertierbar, die Inverse wird mit  $T(s, t)$  bezeichnet als Abbildung von  $\mathbb{R}(1-P(t))$  nach  $\mathbb{R}(1-P(s))$ .
- (iii)  $|T(t, s)P(s)|_\alpha \leq Ke^{-\lambda^s(t-s)}$ .
- (iv)  $|T(s, t)(1-P(t))|_\alpha \leq Ke^{-\lambda^u(t-s)}$ .

Für die Gleichung

$$(1.2) \quad \dot{x} + Ax = 0, \quad x_0 \in X^\alpha$$

ist die Existenz einer exponentiellen Dichotomie gleichbedeutend mit der Existenz von Spektrallücken. Weiterhin sind exponentielle Dichotomien für Gleichung (1.2) unempfindlich gegen kleine Störungen der Differentialgleichung, d.h. (1.1) wird für alle Störungen  $B$  mit kleiner Supremumsnorm ebenfalls eine exponentielle Dichotomie besitzen. Dies wird in folgendem Lemma gezeigt. Natürlich ist der Kerninhalt dieses Lemmas wohlbekannt, vergleiche dazu [12, 31], sowie [23, 21] für unendlich-dimensionale Systeme. Allerdings soll hier



doch für parameterabhängige Differentialgleichungen die Abhängigkeit der Projektionen  $P$  sowie der Halbgruppen  $T(t, s)$  von den Parametern behandelt werden.

**Lemma 1.1** *Die Gleichung (1.2) mit zugehöriger Halbgruppe  $T(t, s)$  habe eine exponentielle Dichotomie auf  $J = [t_0, \infty)$  mit den Konstanten  $K, \lambda^s$  und  $\lambda^u$ . Es sei  $V \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Wähle nun ein  $\gamma > 0$  so klein, daß  $\lambda^s + \lambda^u - \gamma > 0$  ist. Dann existiert ein  $\delta > 0$  nur abhängig von  $A$  und  $\gamma$ , so daß folgendes gilt.*

*Es sei  $B : V \rightarrow C^0(J, L(X^\alpha, X))$  in  $C^k$  bezüglich  $\epsilon$  für  $k \geq 0$ .  $B$  habe lokal Hölderstetige Werte und es sei  $\sup_{t \in J, \epsilon \in V} |B(\epsilon, t)| < \delta$ . Dann erfüllt die zu (1.1) gehörige Halbgruppe  $T_\epsilon(t, s)$  :*

(i) *Gleichung (1.1) hat eine exponentielle Dichotomie, wobei die Projektion  $P_\epsilon \in C^k$  in  $\epsilon$  ist, und es gilt für  $t_0 \leq s \leq t$*

$$\begin{aligned} \left| D_\epsilon^j \left( T_\epsilon(t, s) P_\epsilon(s) \right) \right|_\alpha &\leq K e^{-(\lambda^s - \gamma)(t-s)} \\ \left| D_\epsilon^j \left( T_\epsilon(s, t) (1 - P_\epsilon(t)) \right) \right|_\alpha &\leq K e^{-(\lambda^u - \gamma)(t-s)} \end{aligned}$$

für alle  $0 \leq j \leq k$ .

(ii) *Es sei darüberhinaus*

$$\left| D_\epsilon^j (PB(\epsilon, t)(1 - P)) \right|_\alpha, \left| D_\epsilon^j ((1 - P)B(\epsilon, t)P) \right|_\alpha \leq C e^{-(\lambda^s - \gamma)t}$$

für  $t \geq t_0$  und  $0 \leq j \leq k$ . Dann ist auch

$$\left| D_\epsilon^j (P - P_\epsilon(t)) \right|_\alpha \leq K e^{-(\lambda^s - \gamma)t}$$

für  $t \geq t_0$ .

(iii) *Es sei  $|B(\epsilon, t)|_\alpha \leq C (\epsilon \cdot e^{-(\lambda^s - \gamma)t} + e^{-(\lambda^{ss} - \gamma)t})$  mit  $\lambda^s \leq \lambda^{ss}$ . Dann ist*

$$\left| P - P_\epsilon(t) \right|_\alpha \leq K (\epsilon \cdot e^{-(\lambda^s - \gamma)t} + e^{-(\lambda^{ss} - \gamma)t} + e^{-(\lambda^s + \lambda^u - \gamma)t}).$$

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $t_0 = 0$ . Die Voraussetzung über die Hölderstetigkeit von  $B$  in der Zeit  $t$  wird nur gebraucht, um später starke Lösungen der von (1.1) stammenden Integralgleichungen zu erhalten, siehe [23, Thm. 7.1.3]. Betrachte folgende mit gewichteten Normen versehene Räume :

$$\mathcal{X}^0 = \{X(t) / X(\cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow L(X^\alpha) \text{ stark stetig und } \sup_{t_0 \leq t} |X(t)|_\alpha =: \|X\| < \infty\}$$

$$\mathcal{X}_\eta^s = \{X(t, s) / X(t, s) \in L(X^\alpha) \text{ stark stetig in } t_0 \leq s \leq t \text{ und} \\ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |X(t, s)|_\alpha e^{\eta(t-s)} =: \|X\|_\eta < \infty\}$$

$$\mathcal{X}_\eta^u = \{X(s, t) / X(s, t) \in L(X^\alpha) \text{ stark stetig in } t_0 \leq s \leq t \text{ und} \\ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |X(s, t)|_\alpha e^{\eta(t-s)} =: \|X\|_\eta < \infty\}.$$

Auf diesen Räumen mit  $\eta = \lambda^s - \gamma$  beziehungsweise  $\eta = \lambda^u - \gamma$  werden nun Operatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^0 &: \mathcal{X}_{\lambda^s - \gamma}^s \times \mathcal{X}_{\lambda^u - \gamma}^u \times V \rightarrow \mathcal{X}^0 \\ \mathcal{T}^s &: \mathcal{X}_{\lambda^s - \gamma}^s \times \mathcal{X}^0 \times V \rightarrow \mathcal{X}_{\lambda^s - \gamma}^s \\ \mathcal{T}^u &: \mathcal{X}_{\lambda^u - \gamma}^u \times \mathcal{X}^0 \times V \rightarrow \mathcal{X}_{\lambda^u - \gamma}^u \end{aligned}$$

folgendermaßen definiert. Dabei wird die Abhängigkeit von  $\epsilon$  nicht mehr explizit angegeben.

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}^0(X^s, X^u)(t) = P - \int_0^t T(t, \tau) P B(\epsilon, \tau) X^u(\tau, t) d\tau - \\ \quad \int_t^\infty T(t, \tau) (1 - P) B(\epsilon, \tau) X^s(\tau, t) d\tau \\ \mathcal{T}^s(X^s, X^0)(t, s) = T(t, s) P X^0(s) + \int_s^t T(t, \tau) P B(\epsilon, \tau) X^s(\tau, s) d\tau - \\ \quad \int_t^\infty T(t, \tau) (1 - P) B(\epsilon, \tau) X^s(\tau, s) d\tau \\ \mathcal{T}^u(X^u, X^0)(s, t) = T(s, t) (1 - P) (1 - X^0(s)) + \\ \quad \int_0^s T(s, \tau) P B(\epsilon, \tau) X^u(\tau, t) d\tau - \\ \quad \int_s^t T(s, \tau) (1 - P) B(\epsilon, \tau) X^u(\tau, t) d\tau. \end{array} \right.$$

Diese Abbildungen sind offensichtlich linear und stetig in  $B \in C^0([0, \infty), X^\alpha)$  und damit  $C^k$  in  $\epsilon$ , sowie linear bzw. affin in den anderen Variablen. Ferner sind die Bilder auf den Definitionsbereichen wieder stark stetig. Die folgenden Ungleichungen zeigen, daß die Operatoren auch stetig in die gewichteten Räume abbilden. Die mit  $\|\cdot\|$  bezeichneten Normen beziehen sich stets auf  $\eta = \lambda^s - \gamma$  bzw.  $\eta = \lambda^u - \gamma$ , deshalb werden die Indices im folgenden weggelassen. Zuerst schätzen wir  $\mathcal{T}^0$  ab.

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}^0(X^s, X^u)(t)|_\alpha \\ & \leq |P|_\alpha + \int_0^t |T(t, \tau) P|_{L(X, X^\alpha)} |B(\epsilon, \tau)|_{L(X^\alpha, X)} |X^u(\tau, t)|_\alpha d\tau + \\ & \quad \int_t^\infty |T(t, \tau) (1 - P)|_{L(X, X^\alpha)} |B(\epsilon, \tau)|_{L(X^\alpha, X)} |X^s(\tau, t)|_\alpha d\tau \\ & \leq |P|_\alpha + \int_0^t K(t - \tau)^{-\alpha} e^{-\lambda^s(t-\tau)} \delta e^{-(\lambda^u - \gamma)(t-\tau)} \|X^u\| d\tau + \\ & \quad \int_t^\infty K(\tau - t)^{-\alpha} e^{-\lambda^u(\tau-t)} \delta e^{-(\lambda^s - \gamma)(\tau-t)} \|X^s\| d\tau \\ & \leq |P|_\alpha + K\tilde{C}\delta (\|X^u\| + \|X^s\|) \end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir die Norm von  $\mathcal{T}^s$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}^s(X^s, X^0)(t, s)|_\alpha e^{(\lambda^s - \gamma)(t-s)} \\ & \leq e^{(\lambda^s - \gamma)(t-s)} \left( K e^{-\lambda^s(t-s)} \|X^0\| + \int_s^t K(t - \tau)^{-\alpha} e^{-\lambda^s(t-\tau)} \delta e^{-(\lambda^s - \gamma)(\tau-s)} \|X^s\| d\tau + \right. \\ & \quad \left. \int_t^\infty K(\tau - t)^{-\alpha} e^{-\lambda^u(\tau-t)} \delta e^{-(\lambda^s - \gamma)(\tau-s)} \|X^s\| d\tau \right) \\ & \leq K \|X^0\| + K\delta \|X^s\| \left( \int_s^t (t - \tau)^{-\alpha} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau + \int_t^\infty (\tau - t)^{-\alpha} e^{-(\lambda^u + \lambda^s - \gamma)(s-\tau)} d\tau \right) \\ & \leq K \|X^0\| + K\tilde{C}\delta \|X^s\| \end{aligned}$$

und zuletzt die Norm von  $\mathcal{T}^u$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}^u(X^u, X^0)(s, t)|_\alpha e^{(\lambda^u - \gamma)(t-s)} \\ & \leq e^{(\lambda^u - \gamma)(t-s)} \left( K e^{-\lambda^u(t-s)} (1 + \|X^0\|) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^s K(s-\tau)^{-\alpha} e^{-\lambda^s(s-\tau)} \delta e^{-(\lambda^u-\gamma)(t-\tau)} \|X^u\| d\tau - \\
& \int_s^t K(s-\tau)^{-\alpha} e^{-\lambda^u(\tau-s)} \delta e^{-(\lambda^u-\gamma)(t-\tau)} \|X^u\| d\tau \\
\leq & K(1 + \|X^0\|) + K\delta \|X^u\| \left( \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} e^{-(\lambda^u+\lambda^u-\gamma)(s-\tau)} d\tau - \right. \\
& \left. \int_s^t (s-\tau)^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-s)} d\tau \right) \\
\leq & K(1 + \|X^0\|) + K\tilde{C}\delta \|X^u\|.
\end{aligned}$$

Beachte hierbei, daß nach Voraussetzung  $\gamma$  und  $\lambda^s + \lambda^u - \gamma > 0$  sind. Die Konstante  $\tilde{C} < \infty$  hängt nur von  $\lambda^s, \lambda^u, \gamma$  und  $\alpha$  ab. Für  $\alpha = 0$  gilt  $\tilde{C} = \frac{1}{\lambda + \lambda^u - \gamma}$  in der ersten beziehungsweise  $\tilde{C} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\lambda + \lambda^u - \gamma}$  in den beiden anderen Gleichungen.

Die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathcal{T} : \mathcal{X}_{\lambda^s-\gamma}^s \times \mathcal{X}_{\lambda^u-\gamma}^u \times V \rightarrow \mathcal{X}_{\lambda^s-\gamma}^s \times \mathcal{X}_{\lambda^u-\gamma}^u$$

definiert durch

$$\mathcal{T}(X^s, X^u) := (\mathcal{T}^s(X^s, \mathcal{T}^0(X^s, X^u)), \mathcal{T}^u(X^u, \mathcal{T}^0(X^s, X^u)))$$

ist dann eine Kontraktion gleichmäßig in  $\epsilon \in V$ , falls  $\delta < \delta_0 := (K(K+1)\tilde{C})^{-1}$  ist. Deshalb existiert ein eindeutiger Fixpunkt  $(X_*^s, X_*^u)$ , der  $k$ -mal differenzierbar in  $\epsilon$  ist, vergleiche [8, Thm. 2.2.2]. Definiere  $P_\epsilon(t) := \mathcal{T}^0(X_*^s, X_*^u)(t)$ . Es soll nun gezeigt werden, daß  $P_\epsilon(t)$  und  $(1 - P_\epsilon(t))$  die gewünschten Projektionen auf den stabilen beziehungsweise instabilen Unterraum sind. Setze dazu in die beiden letzten Gleichungen in (1.3) überall die erste Gleichung für  $P_\epsilon(t)$  ein:

$$(1.4) \quad \begin{cases} X_*^s(t, s) &= T(t, s)P - \int_0^s T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, s) d\tau - \\ & \int_t^\infty T(t, \tau)(1-P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, s) d\tau + \\ & \int_s^t T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, s) d\tau \\ X_*^u(s, t) &= T(s, t)(1-P) + \int_t^\infty T(s, \tau)(1-P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau + \\ & \int_0^s T(s, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) d\tau - \\ & \int_s^t T(s, \tau)(1-P) B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) d\tau. \end{cases}$$

Für  $t = s$  ergibt sich dann

$$(1.5) \quad \begin{cases} X_*^s(t, t) &= P - \int_t^\infty T(t, \tau)(1-P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau - \\ & \int_0^t T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) d\tau \\ X_*^u(t, t) &= (1-P) + \int_0^t T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau + \\ & \int_t^\infty T(t, \tau)(1-P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau. \end{cases}$$

Dann folgt  $X_*^s(t, t) + X_*^u(t, t) = 1$ . Außerdem sieht man, daß  $X_*^s(t, t) = P_\epsilon(t)$  ist. Als nächstes wird gezeigt, daß die Abbildungen  $P_\epsilon(t)$  Projektionen sind. Dazu multiplizieren

wir (1.4a) von rechts mit  $X^s(s, s)$  und (1.4b) mit  $X^u(t, t)$ . Anschließend setzen wir die Gleichung (1.5) ein und benutzen  $X_*^s(t, t) + X_*^u(t, t) = 1$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} & X_*^s(t, s)X^s(s, s) \\ &= T(t, s)P - 2 \int_0^s T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, s) d\tau + \\ & \quad \int_0^s T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, s) X^u(s, s) d\tau - \\ & \quad \int_t^\infty T(t, \tau)(1 - P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, s) X^s(s, s) d\tau + \\ & \quad \int_s^t T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, s) X^s(s, s) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_*^u(s, t)X^u(t, t) \\ &= T(s, t)(1 - P) + 2 \int_t^\infty T(s, \tau)(1 - P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau - \\ & \quad \int_t^\infty T(s, \tau)(1 - P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) X^s(t, t) d\tau + \\ & \quad \int_0^s T(s, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) X^u(t, t) d\tau - \\ & \quad \int_s^t T(s, \tau)(1 - P) B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) X^u(t, t) d\tau. \end{aligned}$$

Nun hat diese Gleichung in den neuen Variablen  $\tilde{X}^s(t, s) = X_*^s(t, s)X^s(s, s)$  und  $\tilde{X}^u(s, t) = X_*^u(s, t)X^u(t, t)$  in den gleichen Räumen wieder einen eindeutigen Fixpunkt. Dabei werden die Integrale, die nur  $X_*^s(\tau, t)$  und  $X_*^u(\tau, s)$  enthalten, fest gelassen. Dieser Fixpunkt ist dann aber durch  $(X_*^s(t, s), X_*^u(s, t))$  gegeben, wie man leicht nachrechnet. Daher gilt  $X_*^s(t, s) = X_*^s(t, s)X^s(s, s)$  und  $X_*^u(s, t) = X_*^u(s, t)X^u(t, t)$  für alle  $t \geq s$ . Insbesondere sind  $X^s(t, t) = P_\epsilon(t)$  und  $X^u(t, t)$  Projektionen. Auf dieselbe Art und Weise beweist man die Halbgruppeneigenschaft von  $(X^s, X^u)$ . Beachte dabei, daß die Gleichung für  $X^u(s, t)$  auch für  $s > t$  Sinn macht. Damit ist (i) gezeigt.

Nun zur zweiten Behauptung. Zunächst sei der erste Teil der Fixpunktgleichung (1.3) wiederholt:

$$\begin{aligned} P - P_\epsilon(t) &= \int_0^t T(t, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) d\tau + \\ & \quad \int_t^\infty T(t, \tau)(1 - P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck gilt es nun abzuschätzen. Aus (1.4) folgt leicht

$$\begin{aligned} PX_*^u(s, t) &= \int_0^s T(s, \tau)P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) d\tau \\ &= \int_0^s T(s, \tau)P B(\epsilon, \tau) PX_*^u(\tau, t) d\tau + \\ & \quad \int_0^s T(s, \tau)PB(\epsilon, \tau)(1 - P) X_*^u(\tau, t) d\tau. \end{aligned}$$

Nun wird wieder mit einer gewichteten Norm abgeschätzt

$$|PX_*^u(s, t)|_\alpha e^{(\lambda^u - \gamma)(t-s)} e^{(\lambda^s - \gamma)s} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{(\lambda^u - \gamma)(t-s)} e^{(\lambda^s - \gamma)s} \left( \int_0^s K(s-\tau)^{-\alpha} e^{-\lambda^s(s-\tau)} \delta e^{-(\lambda^u - \gamma)(t-\tau)} e^{-(\lambda^s - \gamma)\tau} d\tau \right. \\
&\quad \left( \sup_{0 \leq \tau \leq s} |PX_*^u(\tau, t)|_\alpha e^{(\lambda^u - \gamma)(t-\tau)} e^{(\lambda^s - \gamma)\tau} \right) + \\
&\quad \left. \int_0^s K(s-\tau)^{-\alpha} e^{-\lambda^s(s-\tau)} C e^{-(\lambda^s - \gamma)\tau} e^{-(\lambda^u - \gamma)(t-\tau)} d\tau \|X_*^u\| \right) \\
&\leq KC\tilde{C} \|X_*^u\| + K\tilde{C}\delta \left( \sup_{0 \leq \tau \leq s} |PX_*^u(\tau, t)|_\alpha e^{(\lambda^u - \gamma)(t-\tau)} e^{(\lambda^s - \gamma)\tau} \right).
\end{aligned}$$

Daher kann nun  $|X_*^u|$  in dieser neuen gewichteten Norm durch

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geq s} |PX_*^u(s, t)|_\alpha e^{(\lambda^u - \gamma)(t-s)} e^{(\lambda^s - \gamma)s} &\leq KC\tilde{C} (1 - K\tilde{C}\delta_0)^{-1} \|X_*^u\| \\
&\leq (K + 1)C\tilde{C} \|X_*^u\|
\end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Die analoge Abschätzung gilt für  $X_*^s$

$$\sup_{t \geq s} |(1 - P)X_*^s(t, s)|_\alpha e^{(\lambda^s - \gamma)(t-s)} e^{(\lambda^s - \gamma)t} \leq (K + 1)C\tilde{C} \|X_*^s\|.$$

Um diese letzte Abschätzung zu erhalten, muß die Fixpunktgleichung (1.3) noch einmal mit den neuen Normen gelöst werden, denn wir müssen ein Supremum für  $t \leq \tau \leq \infty$  bilden. Dann existiert wieder ein eindeutiger Fixpunkt aufgrund des Kontraktionsatzes und die in den verschiedenen Räumen erhaltenen Lösungen stimmen überein, da Beschränktheit der neuen Norm die Beschränktheit in der alten impliziert. Damit erhält man schließlich unter Verwendung dieser Abschätzungen die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|P - P_\epsilon(t)|_\alpha \\
&\leq \left| \int_0^t T(t, \tau) P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) d\tau \right|_\alpha + \left| \int_t^\infty T(t, \tau) (1 - P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau \right|_\alpha \\
&= \left| PX_*^u(t, t) \right|_\alpha + \left| (1 - P)X_*^s(t, t) \right|_\alpha \\
&\leq \text{const. } e^{-(\lambda^s - \gamma)t}.
\end{aligned}$$

Die gleiche Methode wendet man noch auf die Ableitungen nach  $\epsilon$  an. Damit ist (ii) gezeigt. Nun zum dritten Teil. Hier ist konvergiert also  $B_\epsilon(t)$  wie  $C(\epsilon \cdot e^{-(\lambda^s - \gamma)t} + e^{-(\lambda^{ss} - \gamma)t})$  gegen 0. Diesmal braucht man keine gewichteten Normen:

$$\begin{aligned}
&|P - P_\epsilon(t)|_\alpha \\
&\leq \left| \int_0^t T(t, \tau) P B(\epsilon, \tau) X_*^u(\tau, t) d\tau \right|_\alpha + \left| \int_t^\infty T(t, \tau) (1 - P) B(\epsilon, \tau) X_*^s(\tau, t) d\tau \right|_\alpha \\
&\leq \int_0^t K(t-\tau)^{-\alpha} e^{-\lambda^s(t-\tau)} (\epsilon \cdot e^{-(\lambda^s - \gamma)\tau} + e^{-(\lambda^{ss} - \gamma)\tau}) e^{-(\lambda^u - \gamma)(t-\tau)} \|X_*^u\| d\tau + \\
&\quad \int_t^\infty K(\tau-t)^{-\alpha} e^{-\lambda^u(\tau-t)} (\epsilon \cdot e^{-(\lambda^s - \gamma)\tau} + e^{-(\lambda^{ss} - \gamma)\tau}) e^{-(\lambda^s - \gamma)(\tau-t)} \|X_*^s\| d\tau \\
&\leq \text{const. } (\epsilon \cdot e^{-(\lambda^s - \gamma)t} + e^{-(\lambda^{ss} - \gamma)t} + e^{-(\lambda^s + \lambda^u - \gamma)t}).
\end{aligned}$$

Das beweist (iii) und damit das Lemma. □

**Lemma 1.2** *Es gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Lemma 1.1 hat folgende Verallgemeinerung: ausgehend von einer exponentiellen Dichotomie der Gleichung  $\dot{x} + Ax = \tilde{B}(t)x$  (anstelle von (1.2)) hat jede Gleichung  $\dot{x} + Ax = \tilde{B}(t)x + B(t)x$  mit  $\sup |B(t)|$  hinreichend klein ebenfalls eine exponentielle Dichotomie. Es gelten wieder (i) bis (iii) aus Lemma 1.1.*

(ii) *Jede Projektion  $\tilde{P}(0)$  mit  $\mathbb{R}\tilde{P}(0) = \mathbb{R}P(0)$  definiert eine exponentielle Dichotomie  $\tilde{P}(t)$  und es gilt*

$$|\tilde{P}(t) - P(t)|_\alpha \leq Ce^{-(\lambda^s + \lambda^u)t}$$

(iii) *Falls  $|B(t)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, dann folgt  $P(t) \rightarrow P$ .*

(iv) *Es sei  $\beta \in [0, 1)$ . Dann sind der Halbfluß  $X(t, s)$  von (1.1) und die Projektionen  $P(t)$  im Inneren von  $J$  auf  $L(X^\beta)$  fortsetzbar. Außerdem hat Gleichung (1.1) eine exponentielle Dichotomie in  $X^\beta$ , wenn sie eine Dichotomie in  $X^\alpha$  besitzt.*

(v) *Die Projektionen  $P(\cdot) \in C^0((t_0, \infty), X^\beta)$  sind stetig in der Operatornorm im Inneren von  $J$  für jedes  $\beta \in [0, 1)$ .*

**Beweis.** Um Behauptung (i) zu zeigen, ersetzen wir im Beweis von Lemma 1.1 die konstanten Projektionen  $P$  durch die zeitabhängigen neuen Projektionen  $P(t)$ . Die Argumente bleiben dadurch unverändert.

Wir zeigen als nächstes (ii). Es sei durch den Graphen der stetigen Abbildung

$$L : \mathbb{R}(1 - P(0)) \rightarrow \mathbb{R}P(0)$$

ein Komplement von  $\mathbb{R}P(0)$  gegeben. Dann definieren wir

$$\tilde{P}(t) := P(t) - T(t, 0)LT(0, t)(1 - P(0)).$$

Wir sehen leicht, daß  $\tilde{P}(t)$  eine Projektion mit Bild in  $\mathbb{R}P(t)$  ist, denn wegen  $\mathbb{R}L \subset \mathbb{R}P(0)$  gilt

$$\tilde{P}(t) = P(t) - T(t, 0)P(0)LT(0, t)(1 - P(0)).$$

Weiterhin folgt daraus

$$|P(t) - \tilde{P}(t)|_\alpha \leq |T(t, 0)P(0)|_\alpha |L|_\alpha |T(0, t)(1 - P(t))|_\alpha \leq K^2 |L|_\alpha e^{-(\lambda^s + \lambda^u)t}.$$

Die Inverse von  $T(t, s)$  für  $t \geq s$  auf  $\mathbb{R}(1 - \tilde{P}(t))$  ist durch  $(1 - \tilde{P}(t))T(s, t)(1 - P)$  gegeben, denn es gilt  $(1 - \tilde{P}(t))(1 - \tilde{P}(s)) = 1 - \tilde{P}(t)$ . Die exponentiellen Abschätzungen folgen jetzt leicht.

Die Behauptung (iii) folgt wie in [31, Lemma 3.4]. Der Beweis wird deshalb hier nicht ausgeführt.

Wir beweisen (iv). Aus [23, Thm. 7.1.3(c) (i),(ii)] folgt für  $\beta, (\beta + \gamma) \in [0, 1)$ ,  $x \in D(A)$  und  $h > 0$  mit Konstanten  $C(\beta, \gamma) < \infty$ :

$$(1.6) \quad \begin{cases} |X(t+h, t)x|_\beta & \leq C(\beta, \gamma) h^{\min(\gamma, 0)} |x|_{\beta+\gamma} \\ |X(t+h, t)x - x|_\beta & \leq C(\beta, \gamma) h^\gamma |x|_{\beta+\gamma}. \end{cases}$$

Aus [23, Thm. 7.1.3(b)] folgt ferner, daß  $X(t, s)$  ein stark stetiger Halbfluß in  $X^\beta$  ist für jedes  $\beta \in [0, 1)$ . Es sei im folgenden  $x \in D(A)$ . Für  $\beta \leq \alpha$  folgt dann aus (1.6(a))

$$\begin{aligned} |(1 - P(t))x|_\beta &= |X(t, t)(1 - P(t))x|_\beta \\ &= |X(t, t+1)(1 - P(t+1))X(t+1, t)x|_\beta \\ &\leq |X(t, t+1)(1 - P(t+1))X(t+1, t)x|_\alpha \\ &\leq K |X(t+1, t)x|_\alpha \leq KC |x|_{\tilde{\beta}} \end{aligned}$$

für jedes  $\tilde{\beta} \in [0, 1)$ . Wir setzen  $\tilde{\beta} = \beta$  und sehen, daß die Projektionen  $P(t)$  und  $(1 - P(t))$  sich auf  $X^\beta$  fortsetzen lassen. Für  $\beta > \alpha$  gilt ebenso

$$\begin{aligned} |(1 - P(t))x|_\beta &= |X(t, t-h)X(t-h, t+1)(1 - P(t+1))X(t+1, t)x|_\beta \\ &\leq C(h) |X(t-h, t+1)(1 - P(t+1))X(t+1, t)x|_\alpha \\ &\leq KC(h) |X(t+1, t)x|_\alpha \leq KC |x|_\beta. \end{aligned}$$

Dabei wählen wir  $h$  so klein, daß  $t-h$  im Inneren von  $J$  liegt. Damit können wir die Projektionen auf  $X^\beta$  für jedes  $\beta < 1$  fortsetzen. Mit der gleichen Methode zeigt man leicht, daß  $X(t, s)$  in  $X^\beta$  wieder dieselben exponentiellen Dichotomien besitzt.

Zuletzt zeigen wir (v). Der Beweis verläuft wie in [23, Lemma 7.6.2 (iii)]. Aus den Abschätzungen in (iv) - insbesondere aus (1.6) - folgt für  $x \in D(A)$  und  $\gamma + \beta < 1$

$$\begin{aligned} |(1 - P(t+h))x - (1 - P(t))x|_\alpha & \\ &\leq |(X(t+h, t) - 1)(1 - P(t))x|_\alpha + |(1 - P(t+1))(X(t+h, t)x - x)|_\beta \\ &\leq Ch^\gamma |(1 - P(t))x|_{\beta+\gamma} + |X(t+h, t)x - x| \\ &\leq Ch^\gamma |x|_\beta + Ch^\beta |x|_\beta \leq Ch^\gamma |x|_\beta. \end{aligned}$$

Damit ist  $P(t)$  sogar Hölderstetig und das Lemma ist gezeigt. □

**Bemerkung 1.3** (i) *Mit den gleichen Argumenten beweist man analoge Versionen der Lemmata 1.1 und 1.2 für das Intervall  $J = (-\infty, t_0]$ .*

(ii) *Wie bereits im Beweis von Lemma 1.1 bemerkt, wird die lokale Hölderstetigkeit von  $B$  in der Zeit  $t$  nur gebraucht, um starke Lösungen  $X^s$  und  $X^u$  zu erhalten.*

Für weitere Eigenschaften von exponentiellen Dichotomien speziell für durch sektorielle Operatoren definierte Halbgruppen, siehe [23, ch. 7.6].

Für gewöhnliche Differentialgleichungen ist es nun einfach, eine exponentielle Dichotomie auf einem Intervall  $J = [t_0, \infty)$  mit  $t_0 > 0$  auf das Intervall  $[0, \infty)$  (oder jedes andere größere Intervall) auszudehnen. Dies wurde zum Beispiel von Coppel [12, ch. 2] gezeigt. Anders sieht dies für semilineare parabolische Gleichungen aus. Dort kann man die Projektionen nur unter bestimmten Voraussetzungen fortsetzen.

**Lemma 1.4** *Es sei  $B(\cdot) \in C^0([0, \infty), L(X^\alpha, X))$  lokal Hölderstetig und  $t_0 > 0$ . Die Gleichung  $\dot{x} + Ax = B(t)x$  mit Halbgruppe  $T(t, s)$  habe eine exponentielle Dichotomie mit Projektion  $P(t)$  auf  $J = [t_0, \infty)$  (bzw.  $(-\infty, -t_0]$ ). Es sei  $\text{codim } \text{RP}(t_0) < \infty$ . Falls  $T(t, s) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$  injektiv ist und dichtes Bild für alle  $t \geq s \geq 0$  (bzw.  $0 \geq t \geq s$ ) besitzt, dann existiert eine exponentielle Dichotomie auf  $[0, \infty)$  (bzw. auf  $(-\infty, 0]$ ). Dabei ändert sich im allgemeinen der instabile Raum  $\text{R}(1 - P(t))$  (bzw. der stabile Raum  $\text{RP}(t)$ ).*

**Beweis.** Zunächst sei  $J = [t_0, \infty)$ . Dann ist nur  $\text{RP}(t)$  eindeutig bestimmt, der Kern kann frei gewählt werden. Wähle ein  $g : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear und stetig mit  $\text{Ke } g = \text{RP}(t_0)$ , zum Beispiel setze  $g = 1 - P(t_0)$ . Hier sei  $n := \text{codim } \text{RP}(t_0) < \infty$ . Dann ist die Kodimension von  $\text{Ke } g \circ T(t_0, 0) = T(t_0, 0)^{-1} \text{RP}(t_0) =: V_0$  wieder  $n$ , da das Bild von  $T(t_0, 0)$  dicht ist und  $\text{rang } g = n$  gilt. Wähle nun ein Komplement  $W_0$  von  $V_0$  in  $X^\alpha$ . Aufgrund der Injektivität und der Dichtheit des Bildes sind dann auch  $\text{Cl } T(t, 0)V_0$  und  $T(t, 0)W_0$  komplementär in  $X^\alpha$  für  $t > 0$  und spannen  $X^\alpha$  auf. Daher definiert diese Zerlegung stetige Projektionen  $Q(t)$ . Natürlich gilt dann  $\text{R}Q(t) = \text{RP}(t)$  für  $t \geq t_0$ . Zu zeigen ist das exponentielle Abklingverhalten für  $T(t, s)Q(s)$  und  $T(s, t)(1 - Q(t))$  mit  $t \geq s \geq 0$ . Aus [23, p. 195] folgt

$$|T(t, s)|_\alpha \leq M e^{\gamma(t-s)}$$

für ein  $\gamma > 0$ , die exponentielle Dichotomie liefert

$$|T(t, s)Q(s)|_\alpha \leq K e^{-\lambda^s(t-s)}$$

für  $t \geq s \geq t_0$ . Daher gilt dann für  $t \geq t_0 \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned} |T(t, s)Q(s)|_\alpha &\leq |T(t, t_0)Q(t_0)|_\alpha |T(t_0, s)|_\alpha \leq K M e^{-\lambda^s(t-t_0)} e^{\gamma(t_0-s)} \\ &\leq K M e^{(\lambda^s + \gamma)t_0} e^{-\lambda^s(t-s)}. \end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung gilt für  $T(s, t)(1 - Q(t))$ . Daher sind die  $Q(t)$  exponentielle Dichotomien. Genauso (man vertausche die Rollen von stabilem und instabilem Raum) zeigt man das gleiche Resultat für das Intervall  $(-\infty, 0]$ .  $\square$

Wir beachten, daß bei dieser Veränderung der Projektionen die Abschätzungen von Lemma 1.1 wegen Lemma 1.2(i) auch auf dem neuen Intervall  $[0, t_0]$  gelten.

Die Voraussetzungen an die Halbgruppe (Injektivität und Dichtheit des Bildes) sind sehr stark, lassen sich aber trotzdem für eine große Klasse von semilinearen parabolischen Gleichungen nachweisen. Insbesondere Gleichungen mit analytischen Nichtlinearitäten und viele Reaktions-Diffusions Gleichungen besitzen diese Eigenschaften, vergleiche [23, sect. 7.3] und die dort angegebene Literatur.



## 1.2 Gestörte lineare Gleichungen

Hier soll eine Darstellung von Lösungen parameterabhängiger nichtlinearer Differentialgleichungen in der Nähe eines hyperbolischen Gleichgewichts durch Lösungen der Linearisierung gezeigt werden. Für verwandte Resultate vergleiche zum Beispiel [11, ch. 3.8], [22, ch. X.13] und [29, Lemma 4.4].

(A1) Es sei  $A$  ein sektorieller Operator und  $f \in C^{1,\beta}(X^\alpha, X)$  für ein  $\beta > 0$ . Ferner sei  $f(0) = Df(0) = 0$ . Das Spektrum von  $-A$  zerfalle in zwei Spektralmengen  $\sigma(-A) = \sigma^s \cup \sigma^{ss}$ , wobei die Ungleichung  $\operatorname{Re} \sigma^{ss} < -\alpha^{ss} < \operatorname{Re} \sigma^s$  erfüllt sei. Außerdem gelte  $\operatorname{Re} \sigma^s = -\lambda^s < 0$ . Mit  $Q_0^s$  und  $P_0^{ss}$  bezeichnen wir die zu dieser Zerlegung gehörenden Spektralprojektionen, siehe [23, ch. 1.5]. Es sei  $\dim \mathbb{R}Q_0^s < \infty$ .

Weiterhin sei  $A_s := AQ_0^s$  und  $A_{ss} := AP_0^{ss}$ . Betrachte dann die parabolische Differentialgleichung

$$(1.7) \quad \dot{x} + Ax = f(x), \quad x \in X^\alpha$$

**Lemma 1.5** *Die Voraussetzung (A1) sei erfüllt. Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft. Es sei  $x_0 \in U_\delta(0) \subset X^\alpha$  und  $x(t)$  für  $t \geq 0$  die Lösung von (1.7) mit  $x(0) = x_0$ . Dann existiert der Grenzwert  $v := \lim_{t \rightarrow \infty} e^{A_s t} x(t) \in \mathbb{R}Q_0^s$ . Außerdem gilt*

$$|x(t) - e^{-A_s t} v|_\alpha \leq C e^{-\min(\alpha^{ss}, (1+\beta)\lambda^s)t}.$$

*Diese letzte Abschätzung gilt auch für die Ableitung nach  $t$ .*

**Beweis.** Es sei  $(1 + \frac{1}{\beta})\gamma < \lambda^s$  und  $\delta$  so klein, daß  $\sup_{x \in U_\delta(0)} |Df(x)| \leq \gamma$  ist. Dann existiert jede Lösung  $x(t)$  mit  $|x(0)|_\alpha < \delta$  natürlich für alle  $t > 0$ . Tatsächlich konvergieren alle diese Lösungen wie  $e^{-(\lambda^s - \gamma)t}$  gegen 0 für  $t \rightarrow \infty$ . In der Umgebung  $U_\delta(0)$  gilt ferner  $|f(x)| \leq K|x|_\alpha^{1+\beta}$ .

Wir schreiben die Differentialgleichung in eine Integralgleichung um und projizieren gleich in den schwach beziehungsweise stark stabilen Unterraum.

$$(1.8) \quad \begin{cases} Q_0^s x(t) &= e^{-A_s(t-s)} Q_0^s x(s) + \int_s^t e^{-A_s(t-\tau)} Q_0^s f(x(\tau)) d\tau \\ P_0^{ss} x(t) &= e^{-A_{ss}(t-s)} P_0^{ss} x(s) + \int_s^t e^{-A_{ss}(t-\tau)} P_0^{ss} f(x(\tau)) d\tau. \end{cases}$$

Unter Beachtung der Ungleichung für  $f$  folgt dann für  $t \geq s$

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_s^t e^{A_s \tau} Q_0^s f(x(\tau)) d\tau \right|_\alpha \leq \left| \int_s^t C e^{\lambda^s \tau} K e^{-(1+\beta)(\lambda^s - \gamma)\tau} d\tau \right| \\ \leq K C e^{-(\beta\lambda^s - (1+\beta)\gamma)s} (1 - e^{-(\beta\lambda^s - (1+\beta)\gamma)(t-s)}) \\ \left| \int_s^t e^{-A_{ss}(t-\tau)} P_0^{ss} f(x(\tau)) d\tau \right|_\alpha \leq \int_s^t C (t-\tau)^{-\alpha} e^{-\alpha^{ss}(t-\tau)} K e^{-(1+\beta)(\lambda^s - \gamma)\tau} d\tau \\ \leq C e^{-\min(\alpha^{ss}, (1+\beta)(\lambda^s - \gamma))t} \end{array} \right.$$

gleichmäßig in  $s$ . Dabei muß  $\alpha^{ss}$  eventuell ein wenig verkleinert werden, was aber nur die Konstanten der exponentiellen Dichotomie ändert. Aus der ersten Abschätzung in (1.9) folgt daher, daß  $e^{A_s t} x(t)$  eine Cauchyfolge in  $X^\alpha$  für  $t \rightarrow \infty$  ist. Es sei

$$v := \lim_{t \rightarrow \infty} e^{A_s t} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{A_s t} Q_0^s x(t).$$

Dann ist  $v \in \mathbb{R}Q_0^s$  und es gilt

$$Q_0^s x(t) = e^{-A_s t} v + \int_{\infty}^t e^{-A_s(t-\tau)} Q_0^s f(x(\tau)) d\tau.$$

Dies folgt aus Gleichung (1.8) nach dem Grenzübergang  $s \rightarrow \infty$ , der jetzt ja erlaubt ist. Nun kann die Approximation  $e^{-A_s t} v$  mit  $x(t)$  verglichen werden. Zunächst folgt aus (1.9) die Abschätzung  $|x(t)|_\alpha \leq C e^{-\lambda^s t}$ . Deshalb ist dann

$$\begin{aligned} (1.10) \quad & |x(t) - e^{-A_s t} v|_\alpha \\ & \leq \int_{\infty}^t C e^{-\lambda^s(t-\tau)} |x(\tau)|_\alpha^{1+\beta} d\tau + \int_0^t C(t-\tau)^{-\alpha} e^{-\alpha^{ss}(t-\tau)} |x(\tau)|_\alpha^{1+\beta} d\tau \\ & \leq C e^{-\min(\alpha^{ss}, (1+\beta)\lambda^s)t}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung der Differenz der Ableitungen dieser Ausdrücke werden [23, Lemma 3.5.1] sowie die auf Gleichung (1.8) folgenden Ungleichungen verwendet. Dies soll hier nicht weiter ausgeführt werden.  $\square$

**Bemerkung 1.6** *Es seien die Annahmen aus Lemma 1.5 erfüllt. Zusätzlich sei*

$$-A_s = (-\lambda^s + i\omega) Q_0^s$$

*mit einem einfachen Eigenwert  $-\lambda^s + i\omega$ . Wir definieren  $\hat{\beta} := \min(\beta, (\alpha^{ss} - \lambda^s)/\lambda^s)$ . Mit  $b := e^{(-\lambda^s + i\omega)t}$  gilt dann  $x(b) = b v + O(|b|^{1+\hat{\beta}})$  sowie  $|D_b O|_\alpha \leq |b|^{\hat{\beta}}$  bis in  $b = 0$  hinein.*

**Beweis.** Dies folgt unmittelbar aus Lemma 1.5.  $\square$

Ab jetzt beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Zuerst stellen wir einige spezielle Darstellungen von Lösungen in der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit bereit, die wir später bei der Behandlung der Orbit-Flip Verzweigung benötigen werden.

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1.11) \quad \dot{x} + A(\mu)x = f(x, \mu), \quad (x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times V.$$

Hier ist  $V \subset \mathbb{R}^p$  offen. Wir treffen folgende Annahmen.

(A2) Es sei  $f \in C^k$  für ein  $k \geq 2$ . Ferner sei  $f(0, \mu) = D_x f(0, \mu) = 0$  für  $\mu \in V$ . Das Spektrum von  $-A$  zerfalle in zwei Spektralmengen

$$\sigma(-A(\mu)) = \{-\lambda^s(\mu)\} \cup \sigma^{ss}(\mu),$$

wobei die Ungleichung  $\operatorname{Re} \sigma^{ss}(\mu) < -\alpha^{ss} < -\lambda^s(\mu) < -\alpha^s < 0$  gleichmäßig in  $\mu$  gelte. Wir setzen voraus, daß  $-\lambda^s(\mu)$  ein einfacher Eigenwert ist; dann ist  $\lambda^s(\mu) \in C^k$ . Mit  $Q_0^s$  und  $P_0^{ss}$  bezeichnen wir die zu dieser Zerlegung gehörenden und o.B.d.A. von  $\mu$  unabhängigen Spektralprojektionen. Weiterhin sei  $A_{ss}(\mu) := A(\mu)P_0^{ss}$  mit  $\sigma(-A_{ss}(\mu)) = \sigma^{ss}(\mu)$ . Wir nehmen ferner an, daß die lokale stark stabile Mannigfaltigkeit im Eigenraum  $\mathbb{R}P_0^{ss}$  enthalten ist.

Zusätzlich zu dieser grundlegenden Annahme benötigen wir später die folgende Voraussetzung.

(A3) Die Spektralmenge  $\sigma^{ss}(\mu)$  zerfalle ebenfalls in zwei Mengen

$$\sigma^{ss}(\mu) = \{-\lambda^{ss}(\mu)\} \cup \sigma^r(\mu),$$

wobei diesmal die Ungleichung  $\operatorname{Re} \sigma^r(\mu) < -\alpha^r < -\lambda^{ss}(\mu) < -\alpha^{ss} < 0$  gleichmäßig in  $\mu$  gelte. Es sei  $-\lambda^{ss}(\mu)$  ein einfacher Eigenwert. Die zugehörigen Spektralprojektionen bezeichnen wir mit  $Q_0^{ss}$  und  $P_0^r$ ; es gilt also  $P_0^{ss} = Q_0^{ss} + P_0^r$ . Ferner sei  $A_r(\mu) := A(\mu)P_0^r$ . Diesmal sei auch die äußerst stark stabile lokale Mannigfaltigkeit  $W_{loc}^r(0)$  in  $\mathbb{R}P_0^r$  enthalten.

Dann gilt das folgende Lemma.

**Lemma 1.7** *Die Voraussetzung (A2) sei erfüllt. Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft. Es seien kleine Anfangsdaten  $x_0(\mu) \in C^k(V, U_\delta(0))$  und zugehörigen Lösungen  $x(\mu, t)$  von (1.11) gewählt.*

*Dann existiert der Grenzwert  $v^s(\mu) := \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda^s(\mu)t} x(\mu, t)$  und  $v^s(\mu) \in \mathbb{R}Q_0^s$  ist  $C^k$  in  $\mu$ . Ferner gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} |D_t^j (x(\mu, t) - e^{-\lambda^s(\mu)t} v^s(\mu))| &= O(e^{-\alpha^{ss}t})P_0^{ss} + O(e^{-2\alpha^s t}) \\ D_\mu D_t^j x(\mu, t) &= D_\mu D_t^j (e^{-\lambda^s(\mu)t} v^s(\mu)) + O(e^{-\alpha^{ss}t} + e^{-2\alpha^s t}) \end{aligned}$$

für  $j = 0, 1$ .

Ab jetzt gelte zusätzlich noch (A3). Zusätzlich gilt dann folgendes.

(i) Es sei  $v^s(\mu) = \mu_1$ . Dann existiert eine Funktion  $v^{ss}(\mu) \in C^k(V, \mathbb{R}Q_0^{ss})$  mit

$$\begin{aligned} |D_t^j (x(\mu, t) - e^{-\lambda^s(\mu)t} v^s(\mu) - e^{-\lambda^{ss}(0, \hat{\mu})t} v^{ss}(\mu))| \\ = O(|\mu_1|(e^{-\alpha^{ss}t} + e^{-2\alpha^s t}) + e^{-2\alpha^{ss}t}) + O(e^{-\alpha^r t})P_0^r \end{aligned}$$

für  $j = 0, 1$ . Dabei ist  $\hat{\mu}$  durch  $\mu = (\mu_1, \hat{\mu})$  definiert.

(ii) Es gelte  $\lambda^{ss}(0) < 2\lambda^s(0)$ . Dann existiert ebenfalls ein  $v^{ss}(\mu) \in C^k(V, \mathbb{R}Q_0^{ss})$  diesmal mit

$$|D_t^j (x(\mu, t) - e^{-\lambda^s(\mu)t} v^s(\mu) - e^{-\lambda^{ss}(\mu)t} v^{ss}(\mu))| = O(e^{-2\alpha^s t}) + O(e^{-\alpha^r t}) P_0^r$$

für  $j = 0, 1$ .

**Beweis.** Wir beweisen zunächst die Behauptung über  $v^s(\mu)$ . Dies folgt wie in Lemma 1.5, denn die dort aufgestellten Integralgleichungen gelten auch im parameterabhängigen Fall.

Wir erhalten analog zu (1.8)

$$(1.12) \begin{cases} Q_0^s x(\mu, t) &= e^{-\lambda^s(\mu)(t-s)} Q_0^s x(\mu, s) + \int_s^t e^{-\lambda^s(\mu)(t-\tau)} Q_0^s f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \\ P_0^{ss} x(\mu, t) &= e^{-A_{ss}(\mu)(t-s)} P_0^{ss} x(\mu, s) + \int_s^t e^{-A_{ss}(\mu)(t-\tau)} P_0^{ss} f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau. \end{cases}$$

Diesmal ist  $f \in C^k$  mit  $k \geq 2$ . Daher gelten die Abschätzungen aus Lemma 1.5 mit  $\beta = 1$ . Wir sehen, daß das mit  $e^{\lambda^s(\mu)t}$  multiplizierte erste Integral wieder eine Cauchyfolge ist und erhalten schließlich die Grenzwertgleichung

$$(1.13) \quad Q_0^s x(\mu, t) = e^{-\lambda^s(\mu)t} v^s(\mu) + \int_{-\infty}^t e^{-\lambda^s(\mu)(t-\tau)} Q_0^s f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau$$

für  $v^s(\mu) := \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda^s(\mu)t} x(\mu, t)$ . Insbesondere ist  $v^s(\mu) \in C^k$ . Aus (1.13) und der Gleichung

$$P_0^{ss} x(\mu, t) = e^{-A_{ss}(\mu)t} P_0^{ss} x_0(\mu) + \int_0^t e^{-A_{ss}(\mu)(t-\tau)} P_0^{ss} f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau$$

erhalten wir schließlich die geforderten Ungleichungen. Dabei beachten wir, daß wir aufgrund der Koordinatenwahl  $W_{loc}^{ss}(0) \subset \mathbb{R}P_0^{ss}$  die Nichtlinearität in den Koordinaten  $(x^s, x^{ss}) \in \mathbb{R}Q_0^s \times \mathbb{R}P_0^{ss}$  durch  $|Q_0^s f(x^s + x^{ss}, \mu)| \leq C |x^s| |x^s + x^{ss}|$  abschätzen können. Eine Anwendung der Gronwallschen Ungleichung liefert dann das Resultat. Die Abschätzungen für die Ableitungen nach  $\mu$  und  $t$  erhält man durch Differenzieren ebenfalls aus diesen Integralgleichungen. Dabei beachten wir die Voraussetzung  $D_x f(0, \mu) = 0$  für die Abschätzung der Ableitung nach  $\mu$ .

Als nächstes beweisen wir (i). Nach Voraussetzung gilt also  $v^s(\mu) = \mu_1$ . Wegen der Annahme (A3) können wir die vorher erzielten Resultate in der stark stabilen Mannigfaltigkeit auf  $x((0, \hat{\mu}), t)$  anwenden, denn für  $\mu_1 = 0$  liegt  $x(\mu, t)$  in der stark stabilen Mannigfaltigkeit. Wir erhalten also

$$(1.14) \quad x((0, \hat{\mu}), t) = e^{-\lambda^{ss}(0, \hat{\mu})t} v^{ss}(0, \hat{\mu}) + O(e^{-\alpha^r t}) P_0^r + O(e^{-2\alpha^{ss} t}).$$

Anschließend betrachten wir den Fall  $\mu_1 \neq 0$ . Dazu fassen wir  $x(\mu, t)$  als Störung von  $x((0, \hat{\mu}), t)$  auf. Es sei also  $x(\mu, t) = x((0, \hat{\mu}), t) + w(\mu, t)$ . Dann löst  $w(\mu, t) = (w^s, w^{ss}) \in \mathbb{R}Q_0^s \times \mathbb{R}P_0^{ss}$  die Integralgleichung

$$(1.15) \begin{cases} w^s(\mu, t) &= e^{-\lambda^s(\mu)t} w_0^s(\mu) + \int_0^t e^{-\lambda^s(\mu)(t-\tau)} Q_0^s f(x((0, \hat{\mu}), \tau) + w(\mu, \tau), \mu) d\tau \\ w^{ss}(\mu, t) &= e^{-A_{ss}(\mu)t} w_0^{ss}(\mu) + \int_0^t e^{-A_{ss}(\mu)(t-\tau)} Q_0^s \cdot \\ &\quad \left( (A_{ss}(0, \hat{\mu}) - A_{ss}(\mu)) x((0, \hat{\mu}), \tau) + \right. \\ &\quad \left. f(x((0, \hat{\mu}), \tau) + w(\mu, \tau), \mu) - f(x((0, \hat{\mu}), \tau), (0, \hat{\mu})) \right) d\tau. \end{cases}$$

Wegen  $|w(\mu, t)| \leq |\mu_1|e^{-\alpha^s t}$  folgt zunächst wieder

$$Q_0^s x(\mu, t) = w^s(\mu, t) = e^{-\lambda^s(\mu)t} \mu_1 + O(|\mu_1|e^{-2\alpha^s t}).$$

Aufgrund von

$$|f(x + w, \mu) - f(x, (0, \hat{\mu}))| \leq C |\mu_1| |x + w|$$

folgt aus Gleichung (1.15) außerdem

$$\begin{aligned} |w^{ss}(\mu, t)| &\leq |\mu_1|e^{-\lambda^{ss}(\mu)t} + \int_0^t e^{-\lambda^{ss}(\mu)(t-\tau)} (|\mu_1|e^{-\alpha^{ss}\tau} + |\mu_1|(e^{-2\alpha^s\tau} + e^{-\alpha^{ss}\tau})) d\tau \\ &\leq C |\mu_1|(e^{-2\alpha^s t} + e^{-\alpha^{ss}t}). \end{aligned}$$

Aus diesen Abschätzungen und (1.14) folgt (i); die Abschätzung für die Ableitung erhalten wir auf die gleiche Art und Weise.

Schließlich müssen wir noch (ii) zeigen. Dazu zerlegen wir die Differentialgleichung in drei Komponenten.

$$(1.16) \quad \begin{cases} Q_0^s x(\mu, t) &= e^{-\lambda^s(\mu)(t-s)} Q_0^s x(\mu, s) + \int_s^t e^{-\lambda^s(\mu)(t-\tau)} Q_0^s f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \\ Q_0^{ss} x(\mu, t) &= e^{-\lambda^{ss}(\mu)(t-s)} Q_0^{ss} x(\mu, s) + \int_s^t e^{-\lambda^{ss}(\mu)(t-\tau)} Q_0^{ss} f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \\ P_0^r x(\mu, t) &= e^{-A_r(\mu)t} P_0^r x_0(\mu) + \int_0^t e^{-A_r(\mu)(t-\tau)} P_0^r f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \end{cases}$$

Nun schätzen wir die ersten beiden Integrale ab.

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t e^{\lambda^s(\mu)\tau} Q_0^s f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \right| &\leq \left| \int_s^t C e^{\lambda^s(\mu)\tau} e^{-2\lambda^s(\mu)\tau} d\tau \right| \\ &\leq C |e^{-\lambda^s(\mu)t} - e^{-\lambda^s(\mu)s}| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t e^{\lambda^{ss}(\mu)\tau} Q_0^{ss} f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \right| &\leq \left| \int_s^t C e^{\lambda^{ss}(\mu)\tau} e^{-2\lambda^s(\mu)\tau} d\tau \right| \\ &\leq C |e^{-(2\lambda^s(\mu)-\lambda^{ss}(\mu))t} - e^{-(2\lambda^s(\mu)-\lambda^{ss}(\mu))s}|. \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung  $\lambda^{ss}(0) < 2\lambda^s(0)$  sind daher beide Integrale Cauchyfolgen und konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $\mu$ . Wir definieren nun

$$\begin{aligned} v^s(\mu) &:= Q_0^s x(\mu, 0) + \int_0^\infty e^{\lambda^s(\mu)\tau} Q_0^s f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \\ v^{ss}(\mu) &:= Q_0^{ss} x(\mu, 0) + \int_0^\infty e^{\lambda^{ss}(\mu)\tau} Q_0^{ss} f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \end{aligned}$$

und erhalten dann anstelle von (1.16) die Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_0^s x(\mu, t) &= e^{-\lambda^s(\mu)t} v^s(\mu) - \int_t^\infty e^{-\lambda^s(\mu)(t-\tau)} Q_0^s f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \\ Q_0^{ss} x(\mu, t) &= e^{-\lambda^{ss}(\mu)t} v^{ss}(\mu) - \int_t^\infty e^{-\lambda^{ss}(\mu)(t-\tau)} Q_0^{ss} f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau \\ P_0^r x(\mu, t) &= e^{-A_r(\mu)t} P_0^r x_0(\mu) + \int_0^t e^{-A_r(\mu)(t-\tau)} P_0^r f(x(\mu, \tau), \mu) d\tau. \end{aligned}$$

Daraus folgen schließlich die Abschätzungen aus (ii). Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Ebenfalls für die Behandlung der Orbit-Flip Verzweigung werden wir Lösungen der adjungierten Variationsgleichung entlang eines homoklinen Orbits durch Lösungen der adjungierten Linearisierung im Gleichgewicht darstellen. Die nötigen Abschätzungen stellen wir in dem folgenden Lemma bereit. Zunächst geben wir die Annahmen an.

(A4) Es sei  $-A(\mu) \in C^k(L(\mathbb{R}^n))$ . Das Spektrum von  $-A(\mu)$  zerfalle in Spektralmengen

$$\sigma^r(\mu) \cup \{-\lambda^{ss}(\mu)\} \cup \{-\lambda^s(\mu)\} \cup \sigma^u(\mu)$$

mit

$$\operatorname{Re} \sigma^r(\mu) < -\alpha^r < -\lambda^{ss}(\mu) < -\lambda^s(\mu) < \alpha^s < 0 < \alpha^u < \operatorname{Re} \sigma^u(\mu).$$

Die zugehörigen Spektralprojektionen  $P_0^r$ ,  $Q_0^{ss}$ ,  $Q_0^s$  und  $P_0^u$  seien unabhängig von  $\mu$ . Es bezeichne  $T(\mu, t, s)$  die Halbgruppe von  $-A(\mu)$  und es sei  $P_0^s = Q_0^s + Q_0^{ss} + P_0^r$ . Schließlich sei eine Abbildung  $B(\mu, t) \in C^k(V \times [0, \infty) \rightarrow L(\mathbb{R}^n))$  gegeben mit  $|D_\mu^j B(\mu, t)| \leq C e^{-\lambda^u t}$  für  $0 \leq j \leq k$ . Hier sei  $k \geq 2$ .

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$(1.17) \quad \dot{x} + A(\mu)x = B(\mu, t)x$$

Wir bezeichnen den stabilen Teil der Lösungshalbgruppe von (1.17) mit  $X^s(\mu, t, s)$  für  $t, s \geq \Omega > 0$ . Dieser Anteil existiert nach Lemma 1.1, sofern nur  $\Omega$  hinreichend groß ist. Dann erhalten wir das folgende Lemma.

**Lemma 1.8** *Die Voraussetzung (A4) sei erfüllt und  $\Omega$  sei hinreichend groß. Ferner sei  $\lambda^{ss}(0) < \alpha^u$ . Dann existieren Abbildungen*

$$\begin{aligned} Q^s(\mu, \Omega) &:= Q_0^s + \int_\Omega^\infty e^{\lambda^s(\mu)(\tau-\Omega)} Q_0^s B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau, \Omega) d\tau \\ Q^{ss}(\mu, \Omega) &:= Q_0^{ss} + \int_\Omega^\infty e^{\lambda^{ss}(\mu)(\tau-\Omega)} Q_0^{ss} B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau, \Omega) d\tau \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft

$$\left| D_\mu^j \left( X^s(\mu, t) - e^{-\lambda^s(\mu)t} Q^s(\mu, \Omega) - e^{-\lambda^{ss}(\mu)t} Q^{ss}(\mu, \Omega) \right) \right| = O(e^{-(\alpha^u + \alpha^s)t}) + O(e^{-\alpha^r t}) P_0^r$$

für  $0 \leq j \leq k$  und  $t \geq \Omega$ .

**Beweis.** Zunächst gilt Lemma 1.1 auch für parameterabhängige Operatoren. Daher gilt  $|X^s(\mu, t, \Omega)| \leq C(\Omega) e^{-\lambda^s t}$ . Aus (1.4) angewendet auf das Intervall  $[\Omega, \infty)$  folgt dann für die stabile Halbgruppe  $X^s(\mu, t) := X^s(\mu, t, \Omega)$  die Identität

$$(1.18) \quad \begin{cases} X^s(\mu, t) = T(\mu, t, \Omega) P_0^s - \int_t^\infty T(\mu, t, \tau) P_0^u B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau + \\ \int_\Omega^t T(\mu, t, \tau) P_0^s B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau. \end{cases}$$

Weiterhin gilt jetzt für  $t \geq s \geq \Omega$

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t e^{\lambda^s(\mu)(\tau-\Omega)} Q_0^s B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau \right| &\leq \int_s^t C(\Omega) e^{-(\alpha^s + \alpha^u - \lambda^s(\mu))\tau} d\tau \\ &\leq C(\Omega) e^{-(\alpha^s + \alpha^u - \lambda^s(\mu))s} \\ \left| \int_s^t e^{\lambda^{ss}(\mu)(\tau-\Omega)} Q_0^{ss} B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau \right| &\leq \int_s^t C(\Omega) e^{-(\alpha^s + \alpha^u - \lambda^{ss}(\mu))\tau} d\tau \\ &\leq C(\Omega) e^{-(\alpha^s + \alpha^u - \lambda^{ss}(\mu))s}. \end{aligned}$$

Beachte dabei die Voraussetzung  $\lambda^{ss}(\mu) < \alpha^u$ . Beide Integrale sind daher Cauchyfolgen und konvergieren für  $t \rightarrow \infty$ . Wir definieren nun

$$\begin{aligned} J^s(\mu, \Omega) &:= \int_{\Omega}^{\infty} e^{\lambda^s(\mu)(\tau-\Omega)} Q_0^s B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau \\ J^{ss}(\mu, \Omega) &:= \int_{\Omega}^{\infty} e^{\lambda^{ss}(\mu)(\tau-\Omega)} Q_0^{ss} B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau \end{aligned}$$

und setzen diese Identitäten in Gleichung (1.18) ein

$$\begin{aligned} X^s(\mu, t) &= T(\mu, t, \Omega) P_0^s + T(\mu, t, \Omega) (J^s(\mu, \Omega) + J^{ss}(\mu, \Omega)) - \\ &\int_t^{\infty} T(\mu, t, \tau) (Q_0^s + Q_0^{ss}) B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau + \\ &\int_{\Omega}^t T(\mu, t, \tau) P_0^r B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau - \int_t^{\infty} T(\mu, t, \tau) P_0^u B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Für den Restterm  $R(\mu, t) := X^s(\mu, t) - T(\mu, t, \Omega) (Q_0^s + J^s(\mu, \Omega) + Q_0^{ss} + J^{ss}(\mu, \Omega))$  folgt deshalb

$$\begin{aligned} R(\mu, t) &= T(\mu, t, \Omega) P_0^r + \int_{\Omega}^t T(\mu, t, \tau) P_0^r B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau - \\ &\int_t^{\infty} T(\mu, t, \tau) (Q_0^s + Q_0^{ss}) B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau - \\ &\int_t^{\infty} T(\mu, t, \tau) P_0^u B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Diese Terme müssen nun noch abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} |T(\mu, t, \Omega) P_0^r| &\leq C(\Omega) e^{-\alpha^r t} \\ |\int_{\Omega}^t T(\mu, t, \tau) P_0^r B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau| &\leq \int_{\Omega}^t C(\Omega) e^{-\alpha^r(t-\tau)} e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\tau} d\tau \\ &\leq C(\Omega) (e^{-\alpha^r t} + e^{-(\alpha^s + \alpha^u)t}) \\ |\int_t^{\infty} T(\mu, t, \tau) (Q_0^s + Q_0^{ss}) B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau| &\leq \int_t^{\infty} C(\Omega) e^{-\lambda^s(\mu)(t-\tau)} e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\tau} d\tau \\ &\leq C(\Omega) e^{-(\alpha^s + \alpha^u)t} \\ |\int_t^{\infty} T(\mu, t, \tau) P_0^u B(\mu, \tau) X^s(\mu, \tau) d\tau| &\leq \int_t^{\infty} C(\Omega) e^{\alpha^u(t-\tau)} e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\tau} d\tau \\ &\leq C(\Omega) e^{-(\alpha^s + \alpha^u)t}. \end{aligned}$$

Die gleichen Abschätzungen gelten nun wegen Lemma 1.1 und der Voraussetzung an  $B(\mu, t)$  auch für die Ableitungen nach  $\mu$ . Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 1.9** Die Abbildungen  $Q^s(\mu, \Omega)$  und  $Q^{ss}(\mu, \Omega)$  aus Lemma 1.8 sind die Summe einer exponentiellen Dichotomie für Gleichung (1.17) und eines Terms, der das asymptotische Verhalten im Bildraum dieser exponentiellen Dichotomie erfasst. Der Kern besteht aus den stark beziehungsweise äußerst stark stabilen Lösungen.

**Beweis.** Dies folgt aus Gleichung (1.5b) und den Abschätzungen aus Lemma 1.8.  $\square$

## 2. Der geometrische Zugang: Zentrumsmannigfaltigkeiten

### 2.1 Einführung

In diesem Kapitel soll die Existenz von Zentrumsmannigfaltigkeiten für homokline Orbits gezeigt werden. Dazu werden wir die Graphentransformation verwenden. Diese Methode hat eine lange Geschichte. Eingeführt wurde sie wohl von Hadamard [19], der wohl umfangreichste und allgemeinste Beitrag stammt von Hirsch, Pugh und Shub [24].

Wir konstruieren zunächst eine lokal invariante Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$ , die dadurch charakterisiert ist, daß sie alle Lösungen enthält, die für negative Zeiten in einer kleinen tubularen Umgebung  $\mathcal{U}$  des Orbits  $\gamma(q_0)$  bleiben. Anschließend kann nach Einschränkung des Halbflusses auf diese Fläche die Zeit umgekehrt werden, und mit der gleichen Methode dann in  $W_{hom}^{cu}$  die Existenz von  $W_{hom}^c$  gezeigt werden. Diese Mannigfaltigkeit soll nun, wie in der Einleitung erwähnt, diejenigen Lösungen enthalten, die sich für alle Zeiten in der tubularen Umgebung  $\mathcal{U}$  des homoklinen Orbits aufhalten.

Wie geht nun die Konstruktion dieser Flächen vor sich? Dies geschieht, wie gesagt, mit der Graphentransformation. Zunächst werden aus einer exponentiellen Dichotomie entlang der Variationsgleichung des homoklinen Orbits stabile und instabile Vektorbündel bestehend aus kontrahierenden und expandierenden Richtungen gewonnen. Tatsächlich ist die Linearisierung eingeschränkt auf das instabile Bündel nicht notwendig expandierend, sie kontrahiert dort aber schwächer als im stabilen Bündel. Dies definiert eine (pseudo-

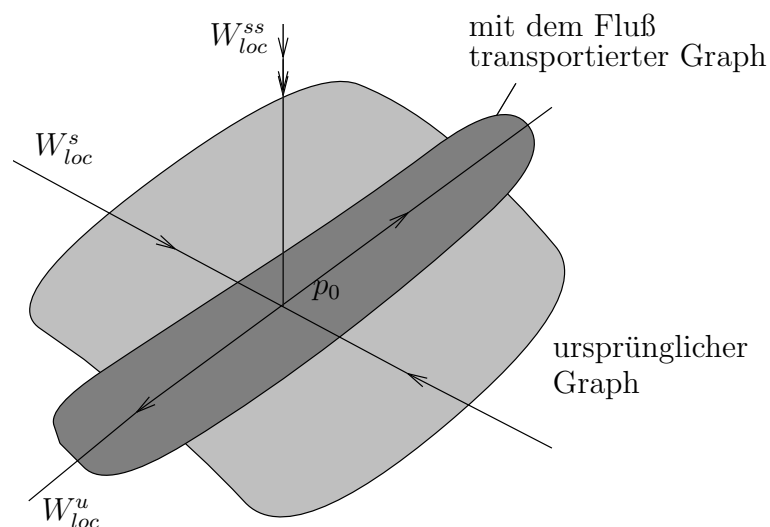


Abbildung 4: Lokale invariante Mannigfaltigkeiten in der Nähe des Gleichgewichts



)hyperbolische Struktur in der Nähe von  $\gamma(q_0)$ , siehe [24, ch. 5, p.53]. Wir betrachten Flächen, die als Graphen über dem instabilen Bündel, d.h. als Abbildungen vom instabilen in das stabile Bündel, dargestellt sind. Die Idee besteht nun darin, auf derartige Flächen den Halbfluß anzuwenden. Falls dann das so entstandene Objekt wieder als Graph dargestellt werden kann, so erhalten wir eine Kontraktion auf dem Funktionenraum der Graphen über dem instabilen Bündel; entlang der stabilen Fasern werden die Graphen ja kontrahiert. Der schwierige Teil ist allerdings der Nachweis, daß die mit dem Fluß transportierten Graphen tatsächlich selbst wieder Graphen sind. Dazu sind zwei Dinge nachzuweisen. Zum einen muß über jedem Punkt des ursprünglichen Definitionsbereichs wieder ein neuer Bildpunkt liegen, zum anderen muß dieser Bildpunkt auch noch eindeutig sein. In Abbildung 4 sehen wir aber, daß die erste Bedingung, das sogenannte Überfließen, bei homoklinen Orbits nicht erfüllt sein wird, denn bereits bei der Konstruktion einer invarianten Mannigfaltigkeit lokal um das Gleichgewicht  $p_0$  herum wird der neue Definitionsbereich des transportierten Graphen schrumpfen. Normalerweise umgeht man diese Schwierigkeit durch Globalisierung, d.h. durch das Abschneiden der Nichtlinearität außerhalb einer kleinen Umgebung von  $p_0$ . Dies ist bei homoklinen Lösungen nicht so leicht möglich, da diese selbst globaler Natur sind. Stattdessen werden wir in einer geeigneten Umgebung von  $p_0$  im expandierenden Eigenraum das gesamte Vektorfeld abschneiden, siehe Abbildung 5.

Dadurch verlieren wir zwar die pseudo-hyperbolische Struktur, da in diesem Bereich die Aufspaltung in expandierende (beziehungsweise schwach kontrahierende) und stark kontrahierende Richtungen nicht mehr existiert. Wir können aber durch Aufbringen einer zusätzlichen Kontraktion im stabilen Eigenraum diese hyperbolische Struktur erhalten. Damit haben wir das Überfließen des Definitionsbereichs erreicht. Die pseudo-hyperbolische

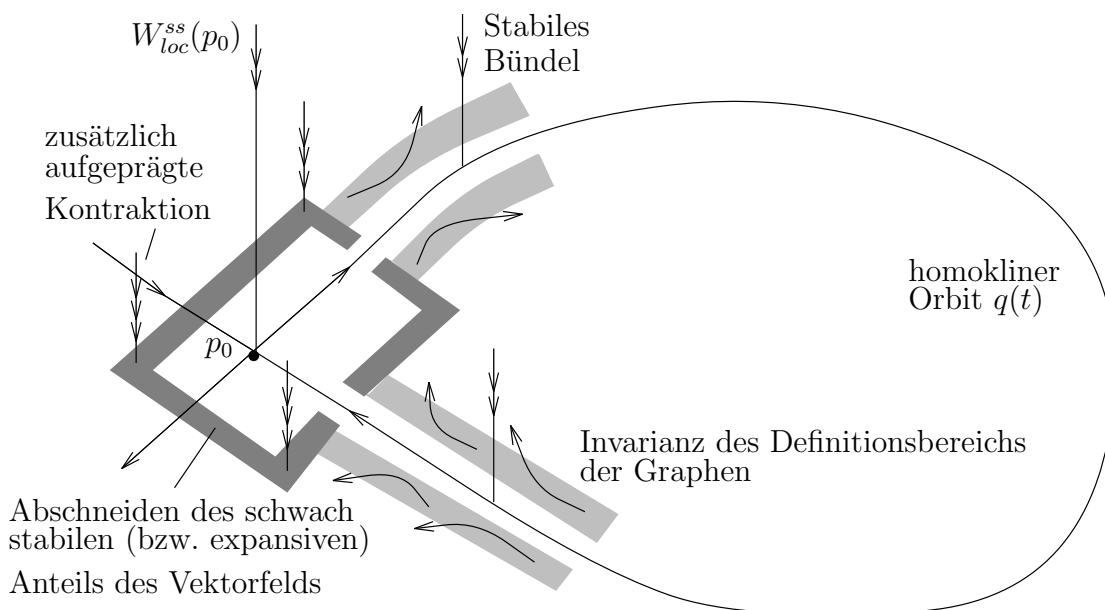


Abbildung 5: Modifikation des Vektorfelds

Struktur liefert zuletzt, daß der transportierte Graph wieder als Graph geschrieben werden kann.

## 2.2 Das Resultat

Betrachte die Differentialgleichung

$$(2.1) \quad \dot{x} + Ax = f(x), \quad x \in X^\alpha$$

für  $t > 0$  und mit  $x(0) = x_0 \in X^\alpha$ .  $A$  sei ein sektorieller Operator, die Nichtlinearität erfülle  $f : X^\alpha \rightarrow X \in C^{r,\rho}$  für  $r, \rho > 0$  und schließlich sei  $f(0) = Df(0) = 0$ . Ferner sei  $q(t)$  ein homokliner Orbit von Gleichung (2.1) mit  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t) = 0$ . Wir bezeichnen mit  $\mathcal{T}(t, s)$  die lineare Lösungshalbgruppe der Variationsgleichung  $\dot{v} + Av = D_x f(q(t))v$  entlang  $q(t)$ .

Zunächst gelte folgende Annahme.

**(H1)** Das Spektrum von  $-A$  zerfalle in die Spektalmengen  $\sigma(-A) = \sigma^s \cup \sigma^c \cup \sigma^u$  mit

$$\operatorname{Re} \sigma^s < -\alpha^{ss} < -\alpha^s < \operatorname{Re} \sigma^c < \alpha^u < \alpha^{uu} < \operatorname{Re} \sigma^u < \alpha^r.$$

Die zugehörigen Eigenräume werden mit  $E_0^i$  für  $i = s, c, u$  bezeichnet. Es sei  $\dim E_0^i < \infty$  für  $i = c, u$ .

Die zu dieser Spektralzerlegung gehörenden Spektralprojektionen werden mit  $P_0^i$  für  $i = s, c, u$  bezeichnet. Ferner sei  $P^{cu,s}$  die zur Spektralmenge  $\{\lambda \in \sigma(-A) / \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$  gehörende Spektralprojektion.

Dann existieren ein  $t_0 \geq 0$  und komplementäre exponentielle Dichotomien  $P^i(t)$  und  $\hat{P}^i(t)$  für  $t > t_0$  beziehungsweise  $t < -t_0$  und  $i = s, c, u$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(2.2) \quad \begin{cases} |\mathcal{T}(t, s)P^s(s)|_\alpha \leq Ke^{-\alpha^{ss}(t-s)} & t \geq s \geq t_0 \\ |\mathcal{T}(t, s)P^c(s)|_\alpha \leq Ke^{\alpha^u(t-s)} & t \geq s \geq t_0 \\ |\mathcal{T}(t, s)P^c(s)|_\alpha \leq Ke^{\alpha^s(s-t)} & s \geq t \geq t_0 \\ |\mathcal{T}(t, s)P^u(s)|_\alpha \leq Ke^{\alpha^{uu}(t-s)} & s \geq t \geq t_0 \end{cases}$$

und für negative Zeiten

$$(2.3) \quad \begin{cases} |\mathcal{T}(t, s)\hat{P}^s(s)|_\alpha \leq Ke^{-\alpha^{ss}(t-s)} & s \leq t \leq -t_0 \\ |\mathcal{T}(t, s)\hat{P}^c(s)|_\alpha \leq Ke^{\alpha^u(t-s)} & s \leq t \leq -t_0 \\ |\mathcal{T}(t, s)\hat{P}^c(s)|_\alpha \leq Ke^{\alpha^s(s-t)} & t \leq s \leq -t_0 \\ |\mathcal{T}(t, s)\hat{P}^u(s)|_\alpha \leq Ke^{\alpha^{uu}(t-s)} & t \leq s \leq -t_0. \end{cases}$$

Die Existenz dieser Projektionen folgt aus Lemma 1.1. Wende dieses Lemma mit den Exponenten  $-\alpha^{ss}$  und  $-\alpha^s$  sowie mit Exponenten  $\alpha^u$  und  $\alpha^{uu}$  an. Anschließend kombiniere man diese Projektionen geeignet. Dabei beachten wir, daß wir nach Lemma 1.2(ii) eine gewisse Freiheit in der Wahl der Projektionen besitzen. Die nächste Voraussetzung ist nun:

(H2) Die exponentiellen Dichotomien lassen sich bis zu  $t_0 = 0$  fortsetzen und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\hat{P}^u(0) \oplus \left( \mathbb{R}P^s(0) \oplus \mathbb{R}P^c(0) \right) &= X^\alpha \\ \mathbb{R}P^s(0) \oplus \left( \mathbb{R}\hat{P}^u(0) \oplus \mathbb{R}\hat{P}^c(0) \right) &= X^\alpha. \end{aligned}$$

Wir beachten, daß die in der ersten Gleichung vorkommenden Räume  $\mathbb{R}\hat{P}^u(0)$  und  $\mathbb{R}P^s(0) \oplus \mathbb{R}P^c(0)$  eindeutig bestimmt sind. Dies sind ja gerade der instabile und stabile Unterraum bezüglich der exponentiellen Dichotomien mit Raten  $\alpha^u$  und  $\alpha^{uu}$  für  $t \leq 0$  und  $t \geq 0$ . Eine analoge Aussage gilt für die Räume in der zweiten Gleichung von (H2). Deshalb hängt diese Annahme nicht von der Wahl der Projektionen ab. Aus Lemma 1.2(v) folgt, daß die Projektionen stetig in der Operatornorm sind bezüglich der Zeit  $t$ .

Die letzte Annahme schließlich betrifft das asymptotische Verhalten des homoklinen Orbits für  $t \rightarrow \infty$ :

(H3) Es existieren einfache Eigenwerte  $\lambda_+, \lambda_- \in \sigma^c(-A)$  mit  $\{\lambda \in \sigma^c / \operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \lambda_\pm\} = \{\lambda_\pm\}$ . Darüberhinaus sei für  $i = +$  und  $i = -$  jeweils eine der folgenden Annahmen erfüllt.

- (a)  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ . Dann konvergiere  $|q(t)|_\alpha$  wie  $e^{\lambda_i t}$  gegen Null für  $t \rightarrow \infty$  und  $i = +$  beziehungsweise  $t \rightarrow -\infty$  für  $i = -$ . (Insbesondere ist hier  $\operatorname{Re} \lambda_+ < 0$  und  $\operatorname{Re} \lambda_- > 0$ .)
- (b)  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ . Dann sei  $q(0) \notin W_{loc}^s(0)$  für  $i = +$  beziehungsweise  $q(0) \notin W_{loc}^u(0)$  für  $i = -$ . Außerdem sei in diesem Fall  $f \in C^{2,\rho}$ .

Wir beachten hier, daß die Eigenwerte  $\lambda_+$  und  $\lambda_-$  nicht die führenden oder prinzipalen Eigenwerte sein müssen. Darüberhinaus können diese Eigenwerte komplex sein. Fall (b) läßt homokline Orbits zu, die in einer eindimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit enthalten sind. Dann gilt der folgende Satz.

**Satz 1** Die Annahmen (H1), (H2) und (H3) seien erfüllt. Ferner sei  $\min(\frac{\alpha^{ss}}{\alpha^s}, \frac{\alpha^{uu}}{\alpha^u}, r + \rho) > k + \beta$  mit  $\beta \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine lokal invariante Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^c$  mit folgenden Eigenschaften.

- (i)  $W_{hom}^c \in C^{k,\beta}$ .
- (ii)  $\dim W_{hom}^c = \dim E^c$ .
- (iii)  $W_{hom}^c$  ist normal hyperbolisch.
- (iv)  $W_{hom}^c$  enthält alle Lösungen, die für alle Zeiten in einer kleinen tubularen Umgebung des Orbits  $\gamma(q_0)$  bleiben.

Es gilt auch eine parameterabhängige Version von Satz 1.

**Satz 2** Es sei  $A$  sektoriell und  $f : X^\alpha \times M \rightarrow X^\alpha \in C^{r,\rho}$  mit  $M \subset \mathbb{R}^p$  offen. Betrachte die parameterabhängige Differentialgleichung

$$(2.4) \quad \dot{x} + Ax = f(x, \mu), \quad (x, \mu) \in X^\alpha \times M.$$

Weiterhin seien die Annahmen (H1) bis (H3) für Gleichung (2.4) mit  $\mu = \mu_0$  erfüllt. Dann existiert eine Umgebung  $U(\mu_0)$  von  $\mu_0$  in  $\mathbb{R}^p$  und eine lokal invariante Fläche  $W_{hom}^{cu}(\mu)$  von (2.4) für  $\mu \in U(\mu_0)$ .  $W_{hom}^{cu}(\mu)$  besitzt die Eigenschaften (ii) bis (iv) aus Satz 1 gleichmäßig in  $\mu \in U(\mu_0)$ . Ferner ist  $W_{hom}^{cu} \in C^{k,\beta}(X^\alpha \times U(\mu_0))$  gemeinsam in  $(x, \mu)$  differenzierbar.

Im restlichen Teil dieses Kapitels sollen diese Sätze bewiesen werden.

## 2.3 Der Beweis

Wie in der Einführung erwähnt, beweisen wir zunächst die Existenz von  $W_{hom}^{cu}$ . Als erstes geben wir aber einen technischen Überblick des Beweises.

Die pseudo-hyperbolische lineare Struktur bewirkt eine schnelle Kontraktion der Ableitung der Zeit  $T$ -Abbildung des Flusses mit der Rate  $e^{-\alpha^{ss}T}$  in den stabilen gegenüber einer langsameren Kontraktion mit der Rate  $e^{-\alpha^s T}$  in den instabilen Räumen. Dabei werden die expandierenden und kontrahierenden Richtungen durch die Bilder  $RP^{cu}(t)$  und  $RP^s(t)$  der exponentiellen Dichotomien gegeben. Um den Definitionsbereich der Graphen beschreiben zu können, wählen wir ein stetig von  $t$  abhängendes Komplement  $S(t)$  von  $\text{span } \dot{q}(t)$  im Bild  $RP^{cu}(t)$ . Das so entstandene Bündel über dem homoklinen Orbit modifizieren wir so, daß es, wie in Abbildung 6 gezeigt, mit dem Eigenraum  $E_0^{cu}$  zusammenpaßt. Anschließend müssen wir das Überfließen dieses Bereichs garantieren. Dazu unterteilen wir den Definitionsbereich in drei Teile, nämlich in  $D^l = U_\epsilon(0)$  in  $E_0^{cu}$ , in  $D^\pm$  und schließlich in den weit entfernten Teil  $D^f$ , vergleiche Bild 6. Wir erreichen das Überfließen in  $D^f$  nun dadurch, daß wir dort den Radius in der zu  $\text{span } \dot{q}(t)$  transversalen Richtung  $RS(t)$  schneller schrumpfen lassen, als der lineare Fluß in  $RP^{cu}(t)$  kontrahiert. Dies ist in Abbildung 6 angedeutet. Hier brauchen wir also nur den Definitionsbereich angepaßt zu wählen. In den Bereichen

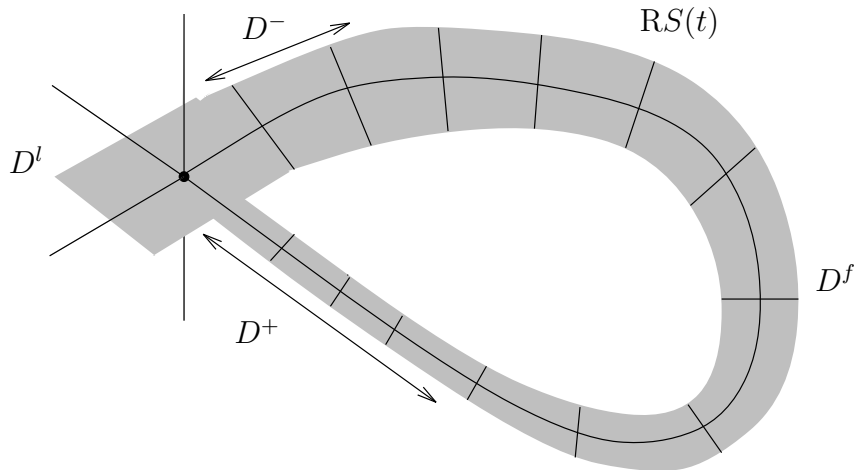


Abbildung 6: Definitionsbereich der Graphen

$D^+$  und  $D^-$  müssen wir das Vektorfeld verändern. Dies geschieht, wie in Abbildung 5 eingezeichnet, durch Addition eines nach außen wirkenden Vektorfelds. Dadurch wird die pseudo-hyperbolische Struktur nicht zerstört, denn tatsächlich wird dort ja die Expansion verstärkt, d.h. die Kontraktion verkleinert. Im verbliebenen Bereich  $D^l$  werden wir dagegen das gesamte Vektorfeld (und nicht nur die Nichtlinearität) in der  $E_0^{cu}$ -Richtung abschneiden, siehe Abbildung 5. Das garantiert natürlich das Überfließen, zerstört aber zugleich die hyperbolische Struktur. Deshalb addieren wir eine zusätzliche Kontraktion der Form  $-\beta_1 \chi(x^{cu}) x^s$  in der stark stabilen Richtung, wobei  $\chi$  eine cutoff-Funktion auf dem stark schraffierten Bereich in Abbildung 5 ist. Dadurch erhalten wir aber für die Ableitung einen Kopplungsterm  $\epsilon^{-1} \beta_1 D\chi x^s$ . Hier ist  $\epsilon$  der Durchmesser des Abschneidebereichs. Dieser Term zerstört die Hyperbolizität nicht, sofern nur die zulässigen stabilen Komponenten  $x^s$  hinreichend klein sind. Daher dürfen wir nur Graphen von  $D$  in das stabile Bündel zulassen, deren Werte kleiner als - sagen wir -  $\kappa_1 \epsilon$  sind für ein kleines von  $\epsilon$  unabhängiges  $\kappa_1$ . Für das Bild jedes solchen Graphen unter der Zeit  $T$ -Abbildung wird die stabile Komponente in  $D^l$  auch wieder kleiner als  $\kappa_1 \epsilon$  sein, denn wir haben eine starke Kontraktion in der stabilen Richtung. Trotzdem handeln wir uns gleich das nächste Problem ein. Denn wir müssen ja nicht nur in der Nähe des Gleichgewichts, sondern auch für die anderen Bereiche nachweisen, daß Graphen mit Werten kleiner als  $\epsilon$  diese Bedingung auch nach Transformation mit der Zeit  $T$ -Abbildung erfüllen. Dazu werden wir auch die Schranken für die zulässigen stabilen Komponenten mit der Zeit  $t$  entlang des homoklinen Orbits schrumpfen lassen, da die Nichtlinearität sonst die lineare Kontraktion zunichte machen könnte. Nun sind wir fast fertig. Es bleibt zu zeigen, daß transportierte Graphen wieder Graphen sind. Dazu betrachten wir die Projektion  $\hat{\pi}^{cu}$  des Bildes eines Graphen  $\sigma$  unter der Zeit  $T$ -Abbildung  $\Phi_T$  auf den Definitionsbereich  $D$ . Die Existenz eines Rechtsinversen dieser Funktion auf  $D$  zeigt dann, daß der transportierte Graph  $\Phi_t \circ (id + \sigma)$  wieder ein Graph ist. Um die Existenz dieses Rechtsinversen zu beweisen, werden wir jeweils geeignete Koordinaten in den Bereichen  $D^l$ ,  $D^\pm$  und  $D^f$  wählen. Diese Teilmengen von  $D$  sollen so große Überlappungen besitzen, daß

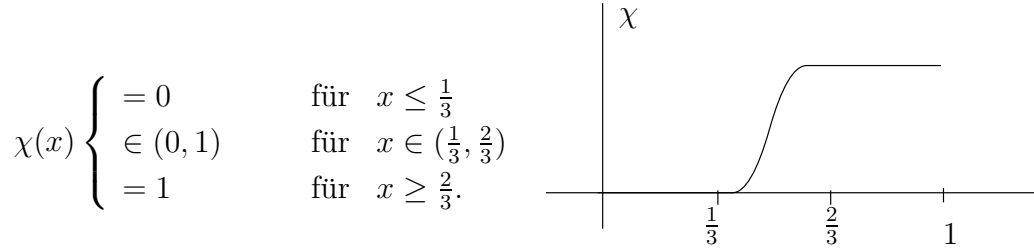
$$\left( (\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T)^{-1} D^l \cap D^l \right) \cup \left( (\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T)^{-1} D^\pm \cap D^\pm \right) \cup \left( (\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T)^{-1} D^f \cap D^f \right) = D$$

gilt. Dann reicht es aus, die Rechtsinversen auf diesen Schnittmengen zu berechnen. Dies hat den Vorteil, daß wir sowohl im Urbild wie im Bild in den gleichen Koordinaten rechnen können.

Nach diesem kurzen Überblick beginnen wir mit dem Beweis. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall reeller  $\lambda_\pm$ . Die nötigen Modifikationen im Falle komplexer Eigenwerte beschreiben wir am Schluß dieses Abschnitts.

### 2.3.1 Stabile und instabile Bündel

Zunächst wählen wir eine feste Abschneidefunktion  $\chi(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  mit



Es sei  $\sup |D\chi| =: K(\chi)$ . Wie üblich definieren wir  $\chi_\epsilon(x) := \chi(x/\epsilon)$ .

Wir wählen Koordinaten in  $E_0^{cu}$ , so daß  $(-A|_{E_0^{cu}})$  die Darstellung  $-A|_{E_0^{cu}} = \Delta + J$  besitzt, wobei  $\Delta$  eine Diagonalmatrix und  $J$  der Jordanblock von  $-A|_{E_0^{cu}}$  ist. Ferner sei

$$\operatorname{Re} \sigma^s + |J| < -\alpha^{ss} < -\alpha^s < \operatorname{Re} \sigma^{cu} \pm |J| < \alpha^r.$$

Dann wähle ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $E_0^{cu}$ , so daß dieses Koordinatensystem orthonormal ist und die einzelnen verallgemeinerten Eigenräume in  $E_0^{cu}$  paarweise senkrecht aufeinander stehen. Dies ist stets möglich, da  $E_0^{cu}$  endlich-dimensional ist. Weiterhin ändern sich dadurch die Annahmen (H1) bis (H3) nicht, nur die Konstante der exponentiellen Dichotomie ändert sich eventuell. Es existieren dann Konstanten  $a_1, a_2 > 0$  mit  $a_1 |x|_\alpha \leq |x| \leq a_2 |x|_\alpha$  für  $x \in E_0^{cu}$ . Hier ist  $|\cdot|$  die durch das Skalarprodukt auf  $E_0^{cu}$  induzierte Norm. Im folgenden werden wir daher o.B.d.A. die Norm  $|\cdot|_\alpha$  durch die Produktnorm von  $|\cdot|$  auf  $E_0^u$  und  $|\cdot|_\alpha$  auf  $E_0^s$  ersetzen.

Anschließend modifizieren wir die Projektionen der exponentiellen Dichotomien und erhalten dann exponentielle Dichotomien auf ganz  $\mathbb{R}$ . Dies sind natürlich keine Dichotomien auf  $\mathbb{R}$  im Sinne von [31], denn wir haben hier nur eine pseudo-hyperbolische Struktur. Die exponentiellen Raten erfüllen  $-\alpha^{ss} < -\alpha^s < 0$ , während in [31] die Trennung in positive und negative Raten  $-\alpha^s < 0 < \alpha^u$  benötigt wird.

**Bemerkung 2.1** *Es existieren Projektionen  $\tilde{P}^s(t)$ ,  $\tilde{P}^u(t)$  und  $\tilde{P}^c(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ , die die gleichen Eigenschaften wie die ursprünglichen Projektionen  $P^i(t)$  und  $\hat{P}^i(t)$  für  $t \geq 0$  bzw.  $t \leq 0$  haben: es gelten die Ungleichungen (2.2) und (2.3). Ferner konvergiert  $\tilde{P}^i(t) \rightarrow P_0^i$  für  $i = s, c, u$  und  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

**Beweis.** Zunächst bilden die Räume  $\mathbb{R}P^s(0)$ ,  $\mathbb{R}\hat{P}^u(0)$  und  $\mathbb{R}(\hat{P}^u(0) + \hat{P}^c(0)) \cap \mathbb{R}(P^s(0) + P^c(0))$  eine Zerlegung von  $X^\alpha$  in komplementäre, abgeschlossene Unterräume. Dann können wir mit Hilfe dieser Zerlegung wieder komplementäre Projektionen  $\tilde{P}^s(0)$ ,  $\tilde{P}^u(0)$  und  $\tilde{P}^c(0)$  definieren. Dies gibt nach Lemma 1.2 exponentielle Dichotomien  $\tilde{P}^s(t)$ ,  $\tilde{P}^u(t)$  und  $\tilde{P}^c(t)$

mit gleichen Exponenten. Aus Lemma 1.2 folgt ebenfalls, daß  $\tilde{P}^i(t) \rightarrow P_0^i$  konvergiert für  $i = s, c, u$  und  $t \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

Im folgenden werden wir die im Lemma erhaltenen Projektionen wieder mit  $P^{cu}(t) = P^c(t) + P^u(t)$  und  $P^s(t)$  bezeichnen. Wir definieren

**Definition.** Es sei  $L : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$  linear und beschränkt. Dann ist die Minimumnorm von  $L$  durch

$$m(L) := \inf_{x \neq 0} \frac{|Lx|_\alpha}{|x|_\alpha}$$

definiert.

**Bemerkung 2.2** *Es gilt mit einer anderen Konstanten  $K$  für  $t \geq s$ :*

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(t, s)|_\alpha &\leq K e^{\alpha^r(t-s)} \\ |\mathcal{T}(t, s)P^s(s)|_\alpha &\leq K e^{-\alpha^{ss}(t-s)} \\ |\mathcal{T}(s, t)P^{cu}(t)|_\alpha &\leq K e^{\alpha^s(t-s)} \\ m(\mathcal{T}(t, s)|_{\mathbb{R}P^{cu}(s)}) &\geq K^{-1} e^{-\alpha^s(t-s)}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die erste Zeile zeigt man leicht, indem wir in Lemma 1.1 auf dem instabilen Teil der Halbgruppe  $t \geq s$  zulassen; vergleiche auch [23, sect. 7.1 exc. 8]. Weiter folgt für  $t > 0 > s$

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(t, s)P^s(s)|_\alpha &= |\mathcal{T}(t, 0)P^s(0)\mathcal{T}(0, s)P^s(s)|_\alpha \\ &\leq |\mathcal{T}(t, 0)P^s(0)|_\alpha |\mathcal{T}(0, s)P^s(s)|_\alpha \\ &\leq K^2 e^{-\alpha^{ss}(t-s)}. \end{aligned}$$

Die dritte Zeile folgt analog. Die vierte Zeile schließlich folgt unmittelbar aus der dritten, da  $\mathcal{T}(t, s)|_{\mathbb{R}P^{cu}(s)}$  invertierbar ist und die inverse Funktion gegeben ist durch  $\mathcal{T}(s, t)|_{P^{cu}(t)}$ . Beachte dabei, daß für invertierbare Operatoren  $L$  stets  $m(L)^{-1} = \|L^{-1}\|$  ist.  $\square$

Um die Graphentransformation durchzuführen, müssen wir stabile und instabile Bündel über dem homoklinem Orbit finden. Das stabile Bündel wird durch  $P^s(t)$  gegeben.

**Definition.** Es seien  $e_\pm$  die zu den einfachen (und reellen) Eigenwerten  $\lambda_\pm$  gehörenden Eigenvektoren. Wir definieren  $E_0^\pm$  als die Spektralkomplemente von  $\text{span } e_\pm$  mit den entsprechenden Spektralprojektionen  $P_0^\pm$  auf  $E_0^\pm$ . Weiter sei  $Q_0^\pm := id - P_0^\pm$  die Projektion auf  $\text{span } e_\pm$ .

Wir können  $\{q(t) / t \geq T_0\}$  beziehungsweise  $\{q(t) / t \leq -T_0\}$  lokal um den Ursprung herum eindeutig als Graph von Funktionen  $h_\pm : [0, b_0) \rightarrow E_0^\pm$  über  $\text{span } e_\pm$  schreiben, sofern nur

$T_0$  groß genug ist. Dabei ist  $b_0 = |Q_0^\pm q(\pm T_0)|_\alpha$ . Diese Abbildungen  $h_\pm(b)$  sind  $C^{r,\rho}$  für  $b > 0$  und  $C^{1,\tilde{\rho}}$  in  $b \geq 0$  für ein  $\tilde{\rho} > 0$ . Falls zum Beispiel  $\lambda_+ = 0$  ist, folgt dies aus der Existenz von Faserungen in der Zentrums-stabilen Mannigfaltigkeit, siehe [10, Thm. 4.1, 4.2] oder [5, Thm. 5.1, 5.2]. Sonst wende den Satz über die Existenz der stark stabilen Mannigfaltigkeit und dann Bemerkung 1.6 an. Für  $\lambda_-$  gilt das gleiche. Insbesondere gilt daher

$$|D_b h_\pm(b)|_\alpha \leq C_0 b^{\tilde{\rho}} \rightarrow 0 \text{ für } b \rightarrow 0.$$

Für die Definition des instabilen Bündels muß nun für jedes  $t$  ein Komplement von  $\text{span } \dot{q}(t)$  in  $RP^{cu}(t)$  gefunden werden. Dazu betrachte das endlich-dimensionale Bündel  $RP^{cu}(t)$  über  $q(t)$ . Definiere ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  auf diesem Bündel für  $|t|$  groß so, daß  $\text{span } \dot{q}(t)$  senkrecht auf  $RP_0^\pm P_0^{cu} = E_0^\pm \cap E_0^{cu}$  steht. Dies ist wegen  $\dot{q}(t)/|\dot{q}(t)|_\alpha \rightarrow e_\pm$  und  $P^{cu}(t) \rightarrow P_0^{cu}$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  möglich. Wegen [3, ch. 4.11] können wir dann dieses Skalarprodukt stetig auf das ganze Bündel  $RP^{cu}(t)$  erweitern.

**Definition.** Es sei

$$\tilde{S}(t)x := P^{cu}(t)x - \left\langle \frac{\dot{q}(t)}{|\dot{q}(t)|_\alpha}, P^{cu}(t)x \right\rangle_t \frac{\dot{q}(t)}{|\dot{q}(t)|_\alpha}$$

die stetige Projektion auf das orthogonale Komplement von  $\text{span } \dot{q}(t)$  in  $RP^{cu}(t)$ . Dann folgt  $\tilde{S}(t) \rightarrow P_0^\pm P_0^{cu}$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Für den Rest dieses Kapitels treffen wir die folgenden Konventionen:

- (i) Mit  $C_0$  bezeichnen wir Konstanten, die nur von den oben getroffenen Festlegungen abhängen, mit  $C(T)$  dagegen solche Konstanten, die zusätzlich auch noch von der Wahl von  $T$  (vergleiche die nachfolgende Definition) abhängen.
- (ii)  $\delta$  ist eine kleine Konstante, die wir wieder später sehr klein wählen werden. Die Wahl von  $\delta$  darf dabei nur von einer Konstanten  $C(T)$  abhängen.
- (iii) Es sei  $\epsilon > 0$  ebenfalls klein, dabei dürfen wir später  $\epsilon$  beliebig klein wählen.

Nun wählen wir ein  $\nu > 0$  mit  $\alpha^s + \nu < \alpha^{ss}$  und ein  $T > 0$  so groß, daß

$$(2.5) \quad K^2 C_0 e^{-(\alpha^{ss} - \alpha^s - \nu)T} < 1$$

wobei  $K$  die Konstante aus Bemerkung 2.2 und  $C_0 \geq 1$  ist. Dies ist nach (H1) stets möglich. Weiterhin wähle ein  $\beta_0 > \alpha^s$  fest.

Ferner wählen wir  $b_0$  und  $T_0$  derart, daß

$$(2.6) \quad \begin{cases} \sup_{|x|_\alpha < b_0} |Df(x)| < \delta & \sup_{b \in (0, b_0]} |D_b h_\pm(b)|_\alpha < \delta \\ \sup_{t \geq T_0} |\tilde{S}(t) - P_0^+ P_0^{cu}|_\alpha < \frac{1}{2}\delta & \sup_{t \leq -T_0} |\tilde{S}(t) - P_0^- P_0^{cu}|_\alpha < \frac{1}{2}\delta \\ \sup_{|t| \geq T_0} |P^s(t) - P_0^s|_\alpha < \frac{1}{2}\delta & \end{cases}$$



gilt. Die Projektionen  $P^s(t)$  und  $\tilde{S}(t)$  sind im allgemeinen nur stetig in  $t$  in der Operatornorm, vergleiche Lemma 1.2(v). Wir können sie aber beliebig genau durch  $C^\infty$ -Funktionen approximieren.

**Bemerkung 2.3** Für jedes  $\delta > 0$  existieren  $Q^s(t)$  und  $S(t)$  in  $C^\infty(\mathbb{R}, L(X^\alpha))$  mit folgenden Eigenschaften:

$Q^s(t)$ ,  $S(t)$  sind Projektionen mit  $|Q^s(t) - P^s(t)|_\alpha$ ,  $|S(t) - \tilde{S}(t)|_\alpha < \delta$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ferner ist  $Q^s(t) = P_0^s$  und  $S(t) = P_0^\pm P_0^{cu}$  für  $t \geq T_0$  bzw.  $t \leq -T_0$ .

**Beweis.** Wegen (2.6) ist für

$$\left. \begin{array}{l} |t| \geq T_0 \\ t \geq T_0 \\ t \leq -T_0 \end{array} \right\} \text{ dann } \left. \begin{array}{l} |P^s(t) - P_0^s|_\alpha \\ |\tilde{S}(t) - P_0^+ P_0^{cu}|_\alpha \\ |\tilde{S}(t) - P_0^- P_0^{cu}|_\alpha \end{array} \right\} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Wir können zwei Projektionen  $Q_0$  und  $Q_1$  mit  $|Q_0 - Q_1|_\alpha \leq 1$  stets durch einen  $C^\infty$ -Weg von Projektionen  $Q(\tau)$  mit  $\tau \in [0, 1]$  verbinden. Definiere nämlich  $Q(\tau) = Q_0$  für  $\tau \leq \frac{1}{4}$  und  $Q(\tau) = Q_1$  für  $\tau \geq \frac{3}{4}$ . Dann interpoliere diese Projektionen wie in [26, exc. I.4.6 (4.13)] unter Verwendung einer cutoff-Funktion und unterteile anschließend das Intervall  $[-T_0, T_0]$  geeignet.  $\square$

Wir definieren nun eine Parametrisierung nahe des homoklinen Orbits  $q(t)$ . Dazu parametrisieren wir erst den Orbit  $q(t)$  mit einer Pseudo-Bogenlänge. Es sei  $q(t(\tau)) =: \tilde{q}(\tau)$  für  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\tilde{q}(\cdot) \in C^{r,\rho}$  mit  $|D_\tau \tilde{q}(\tau)|_\alpha \leq 2$ . Dies erreichen wir durch eine geeignete  $C^\infty$ -Approximation der echten Bogenlänge  $\tilde{t}(\tau)$  mit  $|\tilde{t}(\tau) - t(\tau)| \leq |\dot{q}(\tilde{t}(\tau))|_\alpha$ . Dann erhalten wir eine tubulare Umgebung lokal um  $q = q(t(\tau_0))$  durch die Abbildung

$$\begin{aligned} h_q : (\tau_0 - \delta_0, \tau_0 + \delta_0) \times \mathbb{R}S(t(\tau_0)) \times \mathbb{R}Q^s(t(\tau_0)) &\longrightarrow X^\alpha \\ (\tau, v, w) &\longmapsto q(t(\tau)) + S(t(\tau))v + Q^s(t(\tau))w. \end{aligned}$$

Es ist  $h_q \in C^{r,\rho}$  und

$$Dh_q(\tau_0, 0, 0)(\tilde{\tau}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \frac{d}{d\tau} \tilde{q}(\tau_0) \tilde{\tau} + S(t(\tau_0)) \tilde{v} + Q^s(t(\tau_0)) \tilde{w}.$$

Insbesondere gilt also  $|Dh_q(\tau_0, 0, 0)|_\alpha, |Dh_q(\tau_0, 0, 0)^{-1}|_\alpha \leq C$ , wobei  $C$  nur von den Normen der Projektionen  $S$  und  $Q^s$  abhängt (also apriori durch die Normen von  $\tilde{S}$  und  $P^s$  abgeschätzt werden kann für  $\delta$  klein). Deshalb ist  $h_q$  invertierbar für alle  $\tau \in [t^{-1}(-T_1), t^{-1}(T_1)]$  und  $|v|_\alpha, |w|_\alpha \leq \eta_0$ , wobei  $\eta_0$  von  $T_1$  abhängt. Wir wählen jetzt  $T_1 = T_0 + 5T$  fest.

Als nächstes definieren wir nichtlineare Projektionen auf geeignete Unterbündel innerhalb der tubularen Umgebung mit Hilfe der Parametrisierungen  $h_q$ . Dazu setzen wir jeweils lokal

$$(2.7) \quad \begin{cases} \pi_q(x) & := h_q \circ \left( (\tau, v, w) \mapsto (\tau, 0, 0) \right) \circ h_q^{-1} \\ \pi_q^{cu}(x) & := h_q \circ \left( (\tau, v, w) \mapsto (0, v, 0) \right) \circ h_q^{-1} \\ \pi_q^s(x) & := h_q \circ \left( (\tau, v, w) \mapsto (0, 0, w) \right) \circ h_q^{-1}. \end{cases}$$

Die Bedeutung dieser und der unten definierten Abbildungen wird in Bemerkung 2.4 deutlicher. Tatsächlich zerlegen die Abbildungen  $\pi_q$ ,  $\pi_q^s$  und  $\pi_q^{cu}$  ein Element in ihrem Definitionsbereich eindeutig in die Komponente  $q \in \gamma(q_0)$  entlang des homoklinen Orbits  $\gamma(q_0)$ , die stabilen Komponente und in die Komponente in  $RS(q)$ . Schließlich definieren wir wie angekündigt eine Bündelzerlegung in der Nähe des Gleichgewichts durch Abbildungen  $\pi_\pm$ ,  $\pi_\pm^s$  und  $\pi_\pm^{cu}$ . Wir verwenden eine cutoff-Funktion  $\tilde{\chi}_\epsilon(x)$  definiert durch

$$\tilde{\chi}_\epsilon(b e_\pm) \begin{cases} = 0 & \text{für } b \leq 2\epsilon \\ \in (0, 1) & \text{für } b \in (2\epsilon, 3\epsilon) \\ = 1 & \text{für } b \geq 3\epsilon. \end{cases}$$

Dann sei

$$(2.8) \quad \begin{cases} \pi_\pm(x) = Q_0^\pm x + \tilde{\chi}_\epsilon(Q_0^\pm x) h_\pm(Q_0^\pm x) \\ \pi_\pm^s(x) = P_0^s \left( x - \tilde{\chi}_\epsilon(Q_0^\pm x) h_\pm(Q_0^\pm x) \right) \\ \pi_\pm^{cu}(x) = P_0^{cu} P_0^\pm \left( x - \tilde{\chi}_\epsilon(Q_0^\pm x) h_\pm(Q_0^\pm x) \right) \end{cases}$$

für  $|Q_0^\pm x| \in (0, b_0]$  und  $x \in U_{b_0}(0)$ . Die Abbildungen  $\pi_\pm$ ,  $\pi_\pm^s$  und  $\pi_\pm^{cu}$  zerlegen wie oben einen Vektor in der Nähe des homoklinen Orbits in seine Komponenten bezüglich der Zerlegung in den (abgeschnittenen) homoklinen Orbit, sowie stabile und transversale instabile Richtungen.

**Definition.** Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon &:= \left\{ x = b e_\pm + \tilde{\chi}_\epsilon(b e_\pm) h_\pm(b e_\pm) + y / b \in [\epsilon, b_0], y \in E_0^\pm \text{ mit } |y|_\alpha \leq \epsilon \right\} \cup \\ &\quad \left\{ x / x \in U_\epsilon(\{q(t) / t \in [-T_1, T_1]\}) \right\} \\ \mathcal{U}_\epsilon &:= \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon \cup \hat{\mathcal{U}}_{2\epsilon}. \end{aligned}$$

Hier ist  $\hat{\mathcal{U}}_{2\epsilon} = \hat{\mathcal{U}}_{2\epsilon}^{cu} \times U_{2\epsilon}^s$  das Produkt einer  $2\epsilon$ -Umgebung der Null in der Maximumnorm auf  $E_0^{cu}$  und der  $|\cdot|_\alpha$ -Norm in  $E_0^s$ .  $\mathcal{U}_\epsilon$  ist dann wegen  $Dh^\pm(\epsilon) \leq \epsilon^{\tilde{p}}$  eine offene Umgebung

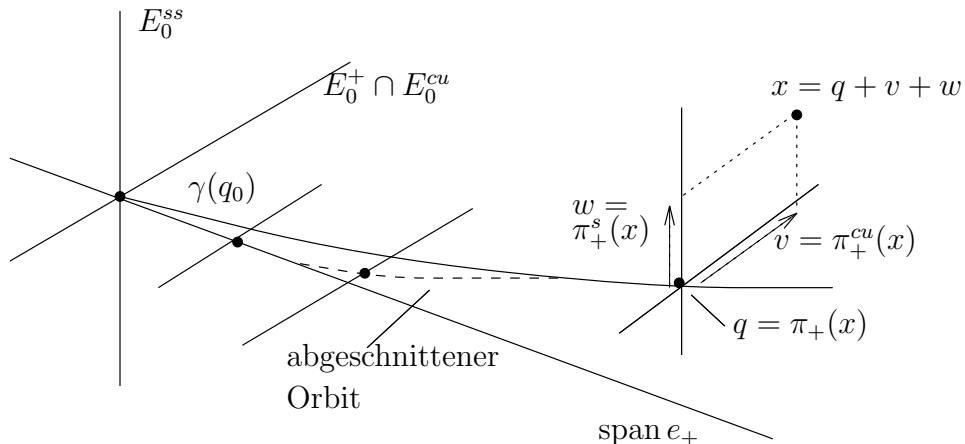


Abbildung 7: Die Projektionen  $\pi_\pm$ ,  $\pi_\pm^s$  und  $\pi_\pm^{cu}$

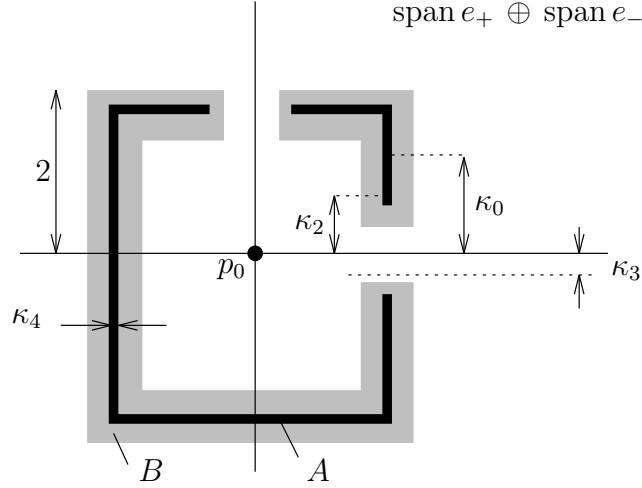


Abbildung 8: Abschneidebereiche von  $\chi^{cu}$  und  $\chi^s$

des homoklinen Orbits für alle hinreichend kleinen  $\epsilon$ .

**Bemerkung 2.4** Die in (2.7) definierten lokalen  $C^{r,\rho}$ -Abbildungen  $\pi_q$ ,  $\pi_q^{cu}$  und  $\pi_q^s$  und die in (2.8) definierten Abbildungen  $\pi_\pm$ ,  $\pi_\pm^s$  und  $\pi_\pm^{cu}$  passen global in  $\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon$  zusammen für  $\epsilon < \epsilon_0$  hinreichend klein und ergeben  $C^{r,\rho}$ -Abbildungen  $\pi$ ,  $\pi^s$  und  $\pi^{cu} : \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon \rightarrow X^\alpha$  mit  $\pi + \pi^s + \pi^{cu} = id$ . Für  $\tilde{\chi}(Q_0^+ x) = 1$  gilt ferner  $\pi(x) \in \gamma(q_0)$ ,  $\pi^s(x) \in \text{RQ}^s(\pi(x))$  sowie  $\pi^{cu}(x) \in \text{RS}(\pi(x))$ .

**Beweis.** Wir sehen zunächst, daß die letztgenannten Eigenschaften für die Abbildungen  $\pi_q$ ,  $\pi_q^s$  und  $\pi_q^{cu}$  gelten:

$$\pi_q + \pi_q^s + \pi_q^{cu} = id$$

$$\pi_q(x) \in \gamma(q_0), \pi_q^s(x) \in \text{RQ}^s(\tilde{\pi}_q(x)) \text{ und } \pi_q^{cu}(x) \in \text{RS}(\tilde{\pi}_q(x)).$$

Diese Zerlegung von  $x$  ist aber eindeutig bestimmt, deshalb stimmen die Funktionen für verschiedene  $q$  auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein. Tatsächlich sind die lokal definierten Abbildungen  $\pi_q$ ,  $\pi_q^s$  und  $\pi_q^{cu}$  nichts anderes als lokale Trivialisierungen des Nullschnitts beziehungsweise der Bündel  $\text{RQ}^s(q)$  und  $\text{RS}(q)$ . Außerdem sieht man leicht, daß wegen der Definition von  $Q^s(\cdot)$ ,  $Q^{cu}(\cdot)$  und  $h_\pm$  die Funktionen  $\pi_\pm^i$  mit  $\pi_q^i$  auf dem Schnitt der Definitionsbereiche übereinstimmen.  $\square$

Um später das Vektorfeld abschneiden zu können, benötigen wir einige weitere Definitionen. Zunächst kann die exponentielle Kontraktionsrate in  $\text{RP}^{cu}(t)$  in der Zeitspanne  $[-T_1, T_1]$  durch  $\kappa_0 := (K e^{(\alpha^s + \nu)T})^{-\frac{2T_1}{T}}$  nach unten abgeschätzt werden. Dann betrachte Abbildung 8. Die Bereiche A und B aus Abbildung 8 sind dabei auf ganz  $E_0^{cu}$  definiert: es sei  $A \subset B$  und B ist der angedickte Rand der Umgebung  $\hat{\mathcal{U}}_2^{cu}$  der Null in  $E_0^{cu}$  bezüglich der Maximumnorm,

aus der eine kleine  $\kappa_3$ -Umgebung der halbseitigen Koordinatenachsen  $\mathbb{R}^+e_+$  und  $\mathbb{R}^+e_-$  herausgenommen wird. Hier wählen wir  $\kappa_2 < \frac{1}{3}\kappa_0$  als den minimalen Abstand von  $A$  zu den Koordinatenachsen (siehe Bild 8). Wir definieren dann cutoff-Funktionen  $\chi^{cu}(x)$  und  $\chi^s(x)$  durch

$$(2.9) \quad \begin{cases} \chi^{cu}(x), \chi^s(x) \in [0, 1] \\ \chi^{cu}|_{\mathcal{C}U_\eta(A)} = 1 & \chi^{cu}|_A = 0 \\ \chi^s|_B = 1 & \chi^s|_{\mathcal{C}U_\eta(B)} = 0 \end{cases}$$

für  $x \in E_0^{cu}$ . Dabei wählen wir  $\eta > 0$  so klein, daß  $U_\eta(A) \subset B$  und  $\eta < \kappa_3$  gilt. Dann berührt  $U_\eta(B)$  die halbseitigen Koordinatenachsen  $\mathbb{R}^+e_\pm$  nicht. Insbesondere gilt  $\{\chi^{cu} < 1\} \subset \{\chi^s = 1\}$ . Ferner definieren wir  $\max(|D\chi^{cu}|, |D\chi^s|) =: \tilde{K}(\chi)$ . Man beachte, daß diese Normen über  $\kappa_0$  nur von der Wahl von  $T$  und  $b_0$  abhängen.

Weiterhin seien  $\chi_\epsilon^\pm$  zwei cutoff-Funktionen, die so aus  $\chi$  zusammengesetzt sind, daß der Graph wie in Abbildung 9 aussieht. Außerdem sei  $|D\chi_\epsilon^\pm(b e_\pm)| \leq K(\chi)$  für  $b \geq \epsilon$ . Wir wählen ein  $\beta_1$  mit

$$(2.10) \quad \beta_1 > \gamma_1 = C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi),$$

wobei  $\gamma_1$  eine nur von  $C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi)$  abhängige Größe ist, die später definiert wird.

### 2.3.2 Die Graphentransformation

Nun können wir für  $x \in \mathcal{U}_\epsilon$  ein modifiziertes Vektorfeld definieren.

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= f_s(x) + f_{cu}(x) \\ &= -A P_0^s x + P_0^s f(x) - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) P_0^s x + \\ &\quad \left( -A P_0^{cu} x + P_0^{cu} f(x) + B_\epsilon^+(x) + B_\epsilon^-(x) \right) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) \\ &:= -A P_0^s x + P_0^s f(x) - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) P_0^s x + \\ &\quad \left( -A P_0^{cu} x + P_0^{cu} f(x) + \beta_0 \left( \chi_{\kappa_0 \epsilon}(|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \chi_\epsilon^+(Q_0^+ \pi(x)) P_0^+ + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \chi_\epsilon^-(|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \chi_\epsilon^-( (1 - P_0^-) \pi(x)) P_0^- \right) P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) \right) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x). \end{aligned} \right.$$

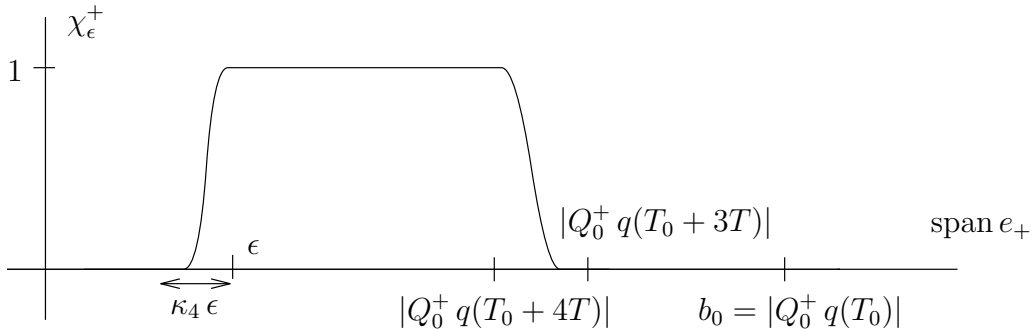


Abbildung 9: Die cutoff-Funktion  $\chi_\epsilon^+$

Dabei sind  $B^+$  und  $B^-$  durch

$$\begin{aligned} B_\epsilon^+(x) &:= \beta_0 \chi_{\kappa_0 \epsilon} (|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \chi_\epsilon^+(Q_0^+ \pi(x)) P_0^+ P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) \\ B_\epsilon^-(x) &:= \beta_0 \chi_\epsilon (|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \chi_\epsilon^-(Q_0^+ \pi(x)) P_0^- P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) \end{aligned}$$

definiert. Wir erklären nun die einzelnen Terme in Gleichung (2.11). Der erste Teil

$$f^s(x) = -A P_0^s x + P_0^s f(x) - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) P_0^s x$$

setzt sich aus dem stabilen Anteil der Differentialgleichung (2.1) und der zusätzlich im Bereich  $B$  aufgeprägten Kontraktion  $-\beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) P_0^s x$  zusammen. Der zweite Term  $f^{cu}(x)$  gibt die  $E_0^{cu}$ -Komponente des modifizierten Vektorfeldes an. Dieser Ausdruck zerfällt in verschiedene Teile, die wir der Reihe nach behandeln. Zunächst schneiden wir den gesamten instabilen Anteil im Bereich  $A$  ab. Dies wird durch  $(\dots) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x)$  realisiert. Der Ausdruck in dieser Klammer wiederum besteht zum einen aus der originalen instabilen Komponente von (2.1) und zum anderen aus dem Term

$$(2.12) \quad \beta_0 \chi_{\kappa_0 \epsilon} (|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \chi_\epsilon^+(Q_0^+ \pi(x)) P_0^+ P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)$$

und dem entsprechenden Term in der Nähe des  $e_-$ -Astes des homoklinen Orbits. Die im Argument von  $\chi_\epsilon^+$  verwendete Norm ist die differenzierbare, durch das Skalarprodukt induzierte Norm auf  $E_0^{cu}$ . Wir beachten hier, daß die Abbildungen  $\pi^{cu}(x)$  und  $\pi(x)$  nur für  $|x|_\alpha > \epsilon$  auftreten, denn für  $|x|_\alpha \leq \epsilon$  gilt bereits

$$\left. \begin{array}{l} \chi_{\kappa_0 \epsilon} \cdot \chi_\epsilon^+ \cdot \chi_\epsilon^{cu} \\ \chi_\epsilon \cdot \chi_\epsilon^- \cdot \chi_\epsilon^{cu} \end{array} \right\} \equiv 0$$

nach Definition. Gleichung (2.12) bringt nun in dem Bereich  $D^+$  die in Abbildung 5 eingezeichnete, zusätzliche Expansion nach außen auf. Dadurch wird das Überfließen in  $D^+$  erreicht, denn es war  $\beta_0 > \alpha^s$  gewählt.

Wir haben gesehen, daß die Differentialgleichung (2.11) wohldefiniert ist. Den zugehörigen nichtlinearen Halbfluß bezeichnen wir mit  $\Phi(t)$ .

Wir definieren jetzt

$$\begin{aligned} D_\epsilon &:= \hat{\mathcal{U}}_{2\epsilon}^{cu} \cup \\ &\left\{ x / x = b e_+ + \tilde{\chi}_\epsilon(Q_0^+ x) h_+(Q_0^+ x) + v \text{ mit } b \in [\epsilon, b_1^+], v \in E_0^{cu} \cap E^+, |v|_\alpha < \kappa_0 \epsilon \right\} \cup \\ &\left\{ x / x = b e_- + \tilde{\chi}_\epsilon(Q_0^- x) h_-(Q_0^- x) + v \text{ mit } b \in [\epsilon, b_1^-], v \in E_0^{cu} \cap E^-, |v|_\alpha < \epsilon \right\} \cup \\ &\left\{ x \in \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon / \pi(x) = q(t) \text{ mit } t \in [-T_1, T_1], \pi^s(x) = 0, |\pi^{cu}(x)|_\alpha < (K e^{(\alpha^s + \nu)T})^{-\frac{t+T_1}{T}} \epsilon \right\}. \end{aligned}$$

Hier ist  $b_1^\pm = |Q_0^\pm q(\pm T_1)|$ . Diese Mannigfaltigkeit dient später als Definitionsbereich der Graphen. Wir unterteilen diese Fläche nun in die bereits angesprochenen, nicht disjunkten



**Bemerkung 2.5** Es seien  $\hat{\pi}^{cu}(x) := \pi(x) + \pi^{cu}(x)$  und  $\hat{\pi}^s(x) := \pi^s(x)$  die Projektionen auf  $D_\epsilon$  beziehungsweise auf die stabilen Fasern. Diese Abbildungen können dann durch  $P_0^{cu}$  und  $P_0^s$  in  $C^{r,\rho}$  auf  $U_{2\epsilon}(0)$  fortgesetzt werden. Die durch

$$E_\epsilon^s := \left\{ x / \hat{\pi}^{cu}(x) \in D_\epsilon, \hat{\pi}^s(x) \in E_\epsilon^s(x) \right\}$$

definierte Menge ist dann ein  $C^{r,\rho}$  Bündel über der  $C^{r,\rho}$ -Mannigfaltigkeit  $D_\epsilon$ . Außerdem ist der homokline Orbit  $\gamma(q_0) \subset E_\epsilon^s$  für alle kleinen  $\epsilon$  im Totalraum dieses Bündels enthalten.

**Beweis.** Dies folgt nach Konstruktion. Wir beachten dabei die Definition (2.8) der Abbildungen  $\pi_\pm$ . Daß der homokline Orbit im Totalraum enthalten ist, ist zunächst nur für den Bereich unklar, in dem  $\tilde{\chi}_\epsilon < 1$  ist. Dort gilt aber  $|h_\pm|_\alpha \leq \epsilon^{1+\bar{\rho}}$ . Insbesondere ist der Fehler in der Norm von  $\pi^s(x)$ , der durch das Abschneiden von  $h_\pm$  entsteht, klein gegen  $\kappa_1\epsilon$ , da  $\kappa_1$  unabhängig von  $\epsilon$  ist.  $\square$

Wir beachten nun, daß die Bereiche  $D_\epsilon^l$ ,  $D_\epsilon^\pm$  und  $D_\epsilon^f$  sich derart überlappen, daß

$$\left( (\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T)^{-1} D^l \cap D^l \right) \cup \left( (\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T)^{-1} D^\pm \cap D^\pm \right) \cup \left( (\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T)^{-1} D^f \cap D^f \right) = D$$

gilt, sofern das Überfließen gezeigt ist. Dabei ist  $\Phi_T$  die Zeit  $T$ -Abbildung des Halbflusses der Differentialgleichung (2.11). Wir werden im folgenden daher nur auf diesen Durchschnitten rechnen und diese Mengen der Einfachheit halber wieder mit  $D_\epsilon^l$ ,  $D_\epsilon^\pm$  oder  $D_\epsilon^f$  bezeichnen.

**Definition.** Wir bezeichnen mit  $o_y$  Funktionen, die für  $y \rightarrow 0$  gegen Null konvergieren, d.h. es gilt  $o_y \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow 0$ .

**Bemerkung 2.6** (i) Es sei  $x \in D_\epsilon$  und  $\pi(x) = q(t)$ . Dann gelten für die Ableitungen  $D\hat{\pi}^{cu}(x)$  und  $D\hat{\pi}^s(x)$  die Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{l} |D\hat{\pi}^{cu}(q(t)) - P^{cu}(t)|_\alpha \\ |D\hat{\pi}^s(q(t)) - P^s(t)|_\alpha \end{array} \right\} < C(T) \delta + o_\epsilon,$$

wobei der  $o$ -Term nur von den Normen von  $P^s$  und  $P^{cu}$  abhängt.

(ii) Wir können  $D_\epsilon^f$  bei  $q = q(t(\tau_0))$  durch

$$\begin{aligned} (id + h_q^{cu}) : (\tau_0 - \delta_0, \tau_0 + \delta_0) \times \mathbb{R}S(t(\tau_0)) &\longrightarrow X^\alpha \\ (\tau, v) &\longmapsto q(t(\tau_0)) + D_\tau \tilde{q}(\tau_0) (\tau - \tau_0) + v + h_q^{cu}(\tau, v) \end{aligned}$$

parametrisieren, wobei  $h_q^{cu}$  durch

$$h_q^{cu}(\tau, v) = q(t(\tau)) - q(t(\tau_0)) - D_\tau \tilde{q}(\tau_0) (\tau - \tau_0) + \left( S(t(\tau)) - S(t(\tau_0)) \right) v$$

gegeben ist. Es gilt  $|Dh_q^{cu}|_\alpha < C_0 \epsilon$  in  $D_\epsilon^f$ .

**Beweis.** Behauptung (i) folgt aus den Definitionen, Bemerkung 2.3 und  $|x - \pi(x)|_\alpha < \epsilon$ . Die zweite Behauptung folgt aus der Definition von  $h_q^{cu}$  und der Kompaktheit des betrachteten Zeitintervalls  $[-T_1, T_1]$ .  $\square$

Nun betrachte die Menge der Lipschitzstetigen Schnitte von  $D_\epsilon$  in das stabile Bündel  $E_\epsilon^s$ :

$$\Sigma_\epsilon := \left\{ \sigma : D_\epsilon \rightarrow X^\alpha / L(\sigma) \leq 1, \sigma(x) \in E_\epsilon^s(x) \forall x \in D_\epsilon \right\}$$

mit den lokalen und globalen Lipschitzkonstanten von  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} L_x(\sigma) &:= \limsup_{y \rightarrow x, y \in D_\epsilon} \frac{|\sigma(y) - \sigma(x)|_\alpha}{|y - x|_\alpha} \\ L(\sigma) &:= \sup_{x \in D_\epsilon} L_x(\sigma). \end{aligned}$$

Versehen mit der  $C^0$ -Norm  $\|\sigma\| = \sup_{x \in D_\epsilon} |\sigma(x)|_\alpha$  ist  $\Sigma_\epsilon$  ein vollständiger metrischer Raum.

Nun beschreiben wir die Graphentransformation. Es sei  $g_\sigma$  ein Rechtsinverses von  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  auf  $D_\epsilon$ , d.h.

$$\hat{\pi}^{cu} \left( \Phi_T(y + \sigma(y)) \right) \Big|_{y=g_\sigma(x)} = x \quad \text{für } x \in D_\epsilon.$$

Hier ist  $\Phi_T$  die Zeit  $T$ -Abbildung des Flusses von (2.11). Die Graphentransformation ist dann die Abbildung

$$\Phi_T^\#(\sigma) := \hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma,$$

d.h.  $\Phi_T^\#(\sigma)$  beschreibt den Graph des mit  $\Phi_T$  transportierten Graphen von  $\sigma$ . Wir müssen nun folgende Punkte nachweisen:

- Wohldefiniertheit von  $\Phi_T^\#$  (d.h. die Existenz eines Rechtsinversen  $g_\sigma$  für jedes  $\sigma \in \Sigma_\epsilon$ )
- $\Phi_T^\# : \Sigma_\epsilon \rightarrow \Sigma_\epsilon$
- $\Phi_T^\#$  ist eine Kontraktion.

Der dann eindeutig bestimmte, nach dem Banachschen Fixpunktsatz existierende Fixpunkt  $\sigma_*$  wird sich dann als die gesuchte Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  erweisen.

Zuerst werden aber noch einige Lemmata aufgestellt, die wir im folgenden benötigen werden.

**Lemma 2.7** *Betrachte die Gleichungen*

$$(2.13) \quad \dot{x} + Ax = f(x)$$

$$(2.14) \quad \dot{x} + Ax = f(x) + g(x, t)$$



wobei  $f, g \in C^{1,\rho}(X^\alpha, X)$  und  $|g|_1 < \delta$  sei. Dann gelten für die Differenz  $x_1(T, x_0) - x_2(T, x_0)$  zweier Lösungen  $x_1$  von (2.13) und  $x_2$  von (2.14) zum gleichen Anfangswert  $x_0$  die Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{l} |x_1(T, \cdot) - x_2(T, \cdot)|_\alpha \\ |D_x(x_1(T, \cdot) - x_2(T, \cdot))|_\alpha \end{array} \right\} \leq C(T) C(A, f) \circ_\delta.$$

**Beweis.** Dies folgt aus [23, Thm. 3.4.1, 3.4.4] und der Gronwallschen Ungleichung.  $\square$

Die folgende Bemerkung sei der Vollständigkeit halber angeführt.

**Bemerkung 2.8** Für eine differenzierbare Funktion  $g$  gilt:

$$g(x + y) - g(x + \tilde{y}) = Dg(x)(y - \tilde{y}) + |y - \tilde{y}| \circ_{|y|+|\tilde{y}|}.$$

**Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} g(x + y) - g(x + \tilde{y}) &= \int_0^1 Dg(x + \tilde{y} + s(y - \tilde{y})) ds (y - \tilde{y}) \\ &= Dg(x)(y - \tilde{y}) + \int_0^1 [Dg(x + \tilde{y} + s(y - \tilde{y})) - Dg(x)] ds (y - \tilde{y}) \end{aligned}$$

und  $Dg(x + \tilde{y} + s(y - \tilde{y})) - Dg(x)$  ist von der Ordnung  $\circ_{|y|+|\tilde{y}|}$ .  $\square$

Nun können wir mit dem eigentlichen Beweis der Existenz des Rechtsinversen beginnen. Wir werden dazu die Abbildung  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  getrennt auf  $D_\epsilon^i$  für  $i = f, \pm, l$  untersuchen. Die Strategie beim Nachweis wird dabei sein, die Abbildung  $\Phi_T$  in einen “guten” und einen kleinen Anteil zu zerlegen.

**I.**  $\hat{\pi}^{cu}(x) \in D_\epsilon^f$ .

Wir beachten, daß in diesem Bereich die ursprüngliche Gleichung (2.1) und die modifizierte Gleichung (2.11) übereinstimmen. Insbesondere gilt daher  $D\Phi_T(q(t)) = \mathcal{T}(t+T, t)$  und wir können in folgender Bemerkung 2.2 anwenden. Das erste Lemma weist nun das Überfließen nach. Wir erinnern an die Definition  $r(t) = (Ke^{(\alpha^s + \nu)T})^{-\frac{t+T_1}{T}} \epsilon/2$  für  $t \in [-T_1, T_1]$ .

**Lemma 2.9** Es existiert ein  $\delta_0 > 0$  nur abhängig von  $C(T)$  und dann ein  $\epsilon_0 > 0$ , so daß für  $\delta < \delta_0$ ,  $\epsilon < \epsilon_0$  und  $t \in [-T_1, T_1]$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned} U_{r(t+T)}(q(t+T)) \cap D_\epsilon^f &\subset \hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) (U_{r(t)}(q(t)) \cap D_\epsilon^f) \\ \hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) (U_{r(t)}(q(t)) \cap D_\epsilon^f) &\subset U_{r(t+T)}(q(t+T)) \cap E_\epsilon^s. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir zerlegen

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^i \circ \Phi_T(q(t) + v) &= \hat{\pi}^i(q(t+T)) + D\hat{\pi}^i(q(t+T)) D\Phi_T(q(t)) v + N(t, v) \\ &=: \hat{\pi}^i(q(t+T)) + Q^i(t+T) L(t) v + N(t, v) \end{aligned}$$

für  $i = cu, s$ , wobei die Lipschitzkonstante  $L(N) \leq C_0 o_\epsilon$  von  $N$  nach Bemerkung 2.8 klein ist. Es gilt weiter  $|Q^i(t) - P^i(t)|_\alpha \leq \delta$  nach Definition für  $i = cu, s$ . Dann beweisen wir das Lemma für die Abbildungen  $Q^{cu}(t+T)L(t) + N(t, x)$  beziehungsweise  $Q^s(t+T)L(t) + N(t, v)$  auf den durch

$$\begin{aligned} & \{v / |Q^{cu}(t)v|_\alpha \leq r(t)\} \\ & \{v / |Q^s(t)v|_\alpha \leq r(t)\} \end{aligned}$$

definierten Umgebungen. Dies ist ausreichend, da  $D_\epsilon^f \cap U_\epsilon(q)$  und der Tangentialraum  $T_q D_\epsilon^f$  in  $q$  in der  $C^1$ -Norm beliebig nahe sind für  $\epsilon$  hinreichend klein.

Für jedes  $v$  mit  $Q^i(t)v = v$  gilt nun  $|P^i(t)v|_\alpha \geq (1 - \delta)|v|_\alpha$ , denn

$$\delta|v|_\alpha \geq |(P^i(t) - Q^i(t))v|_\alpha \geq |v|_\alpha - |P^i(t)v|_\alpha.$$

Wir beachten im weiteren  $r(t+T) = r(t)K^{-1}e^{-(\alpha^s + \nu)T}$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} Q^i(t+T)(L(t) + N(t, \cdot)) &= L(t)P^i(t)Q^i(t) + \left(Q^i(t+T) - P^i(t+T)\right)L(t) + \\ & Q^i(t+T)N(t, \cdot) + L(t)\left(Q^i(t) - P^i(t)\right). \end{aligned}$$

Aus dieser Zerlegung folgt nun leicht

$$\begin{aligned} |Q^{cu}(t+T)(L(t)v + N(t, v))|_\alpha &\geq K^{-1}e^{-\alpha^s T}|Q^{cu}(t)v|_\alpha - \\ & 2r(t)\delta\left(2|L(t)|_\alpha + K^{-1}e^{-\alpha^s T} + |Q^{cu}(t)|_\alpha\right) \\ |Q^s(t+T)(L(t)v + N(t, v))|_\alpha &\leq Ke^{-\alpha^s T}|Q^s(t)v|_\alpha + \\ & 2r(t)\delta\left(2|L(t)|_\alpha + Ke^{-\alpha^s T} + |Q^s(t)|_\alpha\right). \end{aligned}$$

Wir definieren

$$C = 2 \sup_{t \in [-T_1, T_1]} \left( \max(K^{-1}e^{-\alpha^s T} + |Q^{cu}(t)|_\alpha, Ke^{-\alpha^s T} + |Q^s(t)|_\alpha) + 2|L(t)|_\alpha \right)$$

und beachten, daß  $C$  nur von den im Lemma angegebenen Größen abhängt. Damit gilt also

$$\begin{aligned} |Q^{cu}(t+T)(L(t)v + N(t, v))|_\alpha &\geq K^{-1}e^{-\alpha^s T}|Q^{cu}(t)v|_\alpha - Cr(t)\delta \\ |Q^s(t+T)(L(t)v + N(t, v))|_\alpha &\leq Ke^{-\alpha^s T}|Q^s(t)v|_\alpha + Cr(t)\delta. \end{aligned}$$

Dann ist die erste Inklusion in der Behauptung gleichbedeutend mit

$$|Q^{cu}v|_\alpha = r(t) \implies |Q^{cu}(t+T)(L(t)v + N(t, v))|_\alpha > r(t+T).$$

Nach dem Einsetzen der oben hergeleiteten unteren Abschätzung und der Bemerkung über  $r(t)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} K^{-1}e^{-\alpha^s T}r(t)(1 - C\delta) &> r(t+T) && \iff \\ K^{-1}e^{-\alpha^s T}(1 - C\delta) &> K^{-1}e^{-(\alpha^s + \nu)T} && \iff \\ e^{\nu T}(1 - C\delta) &> 1 \end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung ist für  $\delta < \delta_0 := C^{-1}(1 - e^{-\nu T})$  erfüllt, wobei  $\delta_0 > 0$  ist nach den Voraussetzungen an  $\nu$ ,  $\alpha^s$  und  $T$ . Ebenso ist die zweite Inklusion äquivalent zu

$$|Q^s v|_\alpha < r(t) \implies |Q^s(t+T)(L(t)v + N(t, v))|_\alpha < r(t+T)$$

und damit zu

$$\begin{aligned} K e^{-\alpha^{ss} T} r(t) (1 + C \delta) &< r(t + T) &&\iff \\ K e^{-\alpha^{ss} T} (1 + C \delta) &< K^{-1} e^{-(\alpha^s + \nu) T} &&\iff \\ K^2 e^{(\alpha^s + \nu - \alpha^{ss}) T} (1 + C \delta) &< 1. \end{aligned}$$

Auch diese Ungleichung ist für  $\delta < \delta_0$  mit  $\delta_0 = C^{-1}(K^{-2}e^{(\alpha^{ss}-\alpha^s-\nu)T} - 1) > 0$  erfüllt; beachte hier wieder die Voraussetzungen.  $\square$

**Lemma 2.10** *Auf  $D_\epsilon^f$  existiert ein Rechtsinverses  $g_\sigma : D_\epsilon^f \rightarrow D_\epsilon^f$  von  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  für jedes  $\sigma \in \Sigma_\epsilon$  und es gilt*

$$L_x(g_\sigma) \leq K e^{\alpha^s T} + o_\epsilon + C(T) \delta,$$

sofern nur  $\epsilon \leq \epsilon_0$  ist für ein hinreichend kleines  $\epsilon_0$ .

**Beweis.** Zunächst werden wir die Existenz von lokalen Rechtsinverse auf  $D_\epsilon^f \cap U_\epsilon(q)$  nachweisen. Wir können dort nach Bemerkung 2.6(ii)  $D_\epsilon^f$  lokal durch

$$D_\epsilon \cap U_\epsilon(q) = \left\{ q + u + h_q^{cu}(u) \right\}$$

darstellen mit  $u \in U_\epsilon(0) \subset \text{span } \dot{q}(t(\tau_0)) \oplus \text{RS}(t(\tau_0))$  und  $Dh_q^{cu}(u) = o_{|u|_\alpha}$ . Dann gilt wegen der Bemerkungen 2.6 und 2.2, sowie der Definition von  $\Sigma_\epsilon$  die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} &\left| \hat{\pi}^{cu} \left( \Phi_T(q + u + \sigma(q + u)) \right) - \hat{\pi}^{cu} \left( \Phi_T(q + \tilde{u} + \sigma(q + \tilde{u})) \right) \right|_\alpha \\ &\geq \left| D\hat{\pi}^{cu}(\Phi_T(q)) D\Phi_T(q) \left( u + \sigma(q + u) - \tilde{u} - \sigma(q + \tilde{u}) \right) \right|_\alpha - o_\epsilon |u - \tilde{u}|_\alpha \\ &\geq \left| P^{cu}(t + T) D\Phi_T(q(t)) \left( u + \sigma(q + u) - \tilde{u} - \sigma(q + \tilde{u}) \right) \right|_\alpha - (o_\epsilon + C(T) \delta) |u - \tilde{u}|_\alpha \\ &\geq \left| D\Phi_T(q(t)) P^{cu}(t) \left( u + \sigma(q + u) - \tilde{u} - \sigma(q + \tilde{u}) \right) \right|_\alpha - (o_\epsilon + C(T) \delta) |u - \tilde{u}|_\alpha \\ &\geq \left| D\Phi_T(q(t)) P^{cu}(t) (u - \tilde{u}) \right|_\alpha - \left| D\Phi_T(q(t)) P^{cu}(t) (\sigma(q + u) - \sigma(q + \tilde{u})) \right|_\alpha - \\ &\quad (o_\epsilon + C(T) \delta) |u - \tilde{u}|_\alpha \\ &\geq K^{-1} e^{-\alpha^s T} (1 - C(T) \delta) |u - \tilde{u}|_\alpha - \\ &\quad C(T) \left( \left| (P^{cu}(q) - Q^{cu}(\pi(q + \tilde{u}))) (\sigma(q + u) - \sigma(q + \tilde{u})) \right|_\alpha + \right. \\ &\quad \left. \left| (Q^{cu}(\pi(q + u)) - Q^{cu}(\pi(q + \tilde{u}))) \sigma(q + u) \right|_\alpha \right) + (o_\epsilon + C(T) \delta) |u - \tilde{u}|_\alpha \\ &\geq K^{-1} e^{-\alpha^s T} |u - \tilde{u}|_\alpha + (o_\epsilon + C(T) \delta) |u - \tilde{u}|_\alpha, \end{aligned}$$

denn  $|\sigma(q + u)|_\alpha < \epsilon$  und  $Q^{cu}(\pi(q + u)) \sigma(q + u) = 0$ . Die Verwendung der Konstanten  $C(T)$  ist dabei gerechtfertigt, denn die so abgeschätzten Terme hängen nur von den Normen von  $D\Phi_T$  und der Projektionen ab. Für  $\delta < (C(T) K)^{-1} e^{-\alpha^s T}$  ist die Abbildung  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T(q + u + \sigma(q + u))$  injektiv auf  $D_\epsilon^f \cap U_\epsilon(q)$  für jedes  $q \in \gamma(q_0) \cap D_\epsilon^f$  und  $\epsilon \leq \epsilon_0$ , wobei  $\epsilon_0 > 0$  hinreichend klein aber unabhängig von  $q$  ist aufgrund der Kompaktheit von  $\gamma(q_0)$ .

Wegen der Injektivität von  $\Phi_T$  auf  $\gamma(q_0)$  ist diese Abbildung dann tatsächlich injektiv auf ganz  $D_\epsilon^f$ . Ferner folgt aus Lemma 2.9, daß  $D_\epsilon^f \subset \hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ D_\epsilon^f$  gilt. Daher existiert ein globales Rechtsinverses  $g_\sigma : D_\epsilon^f \rightarrow D_\epsilon^f$ , und  $g_\sigma$  ist Lipschitzstetig mit der lokalen Lipschitzkonstanten  $L_x(g_\sigma) < Ke^{\alpha^s T} + C(T)\delta + o_\epsilon$ , vergleiche dazu [38, ch.5 Thm. I.1].  $\square$

Nun berechnen wir noch die Lipschitzkonstante von  $\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  auf  $D_\epsilon^f$ .

**Lemma 2.11** *Es gilt*

$$L_x(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)) \leq Ke^{-\alpha^{ss} T} + o_\epsilon + C(T)\delta$$

für  $x \in D_\epsilon^f$  und  $\epsilon \leq \epsilon_0$  mit  $\epsilon_0 > 0$  hinreichend klein.

**Beweis.** In den gleichen Koordinaten wie in Lemma 2.10 gilt lokal um  $q = q(t(\tau_0)) \in D_\epsilon^f$  wegen Bemerkung 2.6

$$\begin{aligned} & \left| \hat{\pi}^s \left( \Phi_T(q + u + \sigma(q + u)) \right) - \hat{\pi}^s \left( \Phi_T(q + \tilde{u} + \sigma(q + \tilde{u})) \right) \right|_\alpha \\ & \leq \left| D\hat{\pi}^s(\Phi_T(q)) D\Phi_T(q) (u + \sigma(q + u) - \tilde{u} - \sigma(q + \tilde{u})) \right|_\alpha + o_\epsilon |u - \tilde{u}|_\alpha \\ & \leq \left| P^s(t + T) D\Phi_T(q) (u + \sigma(q + u) - \tilde{u} - \sigma(q + \tilde{u})) \right|_\alpha + (o_\epsilon + C(T)\delta) |u - \tilde{u}|_\alpha \\ & \leq \left| D\Phi_T(q) P^s(t) (u + \sigma(q + u) - \tilde{u} - \sigma(q + \tilde{u})) \right|_\alpha + (o_\epsilon + C(T)\delta) |u - \tilde{u}|_\alpha \\ & \leq \left| D\Phi_T(q) P^s(t) (\sigma(q + u) - \sigma(q + \tilde{u})) \right|_\alpha + (o_\epsilon + C(T)\delta) |u - \tilde{u}|_\alpha \\ & \leq Ke^{-\alpha^{ss} T} |u - \tilde{u}|_\alpha + (o_\epsilon + C(T)\delta) |u - \tilde{u}|_\alpha. \end{aligned}$$

Wieder ist die Verwendung der Konstanten  $C(T)$  gerechtfertigt. Die Abschätzung für  $D\Phi_T(q(t)) P^s(t)$  folgt dabei wieder aus Bemerkung 2.2.  $\square$

**Lemma 2.12** *Es sei  $\delta < C(T)^{-1}$  und  $\epsilon \leq \epsilon_0$ . Dann gilt für  $x \in D_\epsilon^f$*

$$L_x(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma) \leq 1.$$

Außerdem ist

$$\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma : D_\epsilon^f \rightarrow E_\epsilon^s|_{D_\epsilon^f}$$

ein Schnitt des stabilen Vektorbündels mit Werten in  $E_\epsilon^s|_{D_\epsilon^f}$ .

**Beweis.** Die Behauptung über die Lipschitzkonstante folgt unter Verwendung von (2.5) und der Lemmata 2.10 und 2.11 aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} L_{x_0}(\Phi_T^\#(\sigma)) & \leq L_{g_\sigma(x_0)}(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)) L_{x_0}(g_\sigma) \\ & \leq (Ke^{-\alpha^{ss} T} + o_\epsilon + C(T)\delta) (Ke^{\alpha^s T} + o_\epsilon + C(T)\delta) \\ & \leq K^2 e^{-(\alpha^{ss} - \alpha^s)T} + o_\epsilon + C(T)\delta \\ & < 1. \end{aligned}$$

Weiterhin ist  $\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma$  ein Schnitt, da  $g_\sigma$  Rechtsinverses von  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  ist. Daß diese Abbildung Werte in  $E_\epsilon^s|_{D_\epsilon^f}$  hat, folgt aus Lemma 2.9. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**II.**  $\hat{\pi}^{cu}(x) \in D_\epsilon^\pm$ .

Wir beschränken uns hier auf  $\hat{\pi}^{cu}(x) \in D_\epsilon^+$ . Die gleichen Resultate mit analogem Beweis gelten für den Fall  $\hat{\pi}^{cu}(x) \in D_\epsilon^-$ .

Die Differentialgleichung (2.11) sieht in diesem Gebiet wie folgt aus

$$(2.15) \quad \begin{cases} \dot{x} &= -Ax + f(x) + \chi_\epsilon^+(Q_0^+ \pi(x)) \chi_{\kappa_0 \epsilon}(|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \beta_0 P_0^+ P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) \\ &= -Ax + f(x) + B_\epsilon^+(x). \end{cases}$$

Nun gilt in diesem Bereich

$$\begin{aligned} \pi(x) &= Q_0^\pm x + h_\pm(Q_0^\pm x) \\ \pi^{cu}(x) &= P_0^{cu} P_0^\pm (x - h_\pm(Q_0^\pm x)) \\ \pi^s(x) &= P_0^s (x - h_\pm(Q_0^\pm x)). \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind nun  $C^1$ -nahe an den entsprechenden Spektralprojektionen, da  $|Dh_\pm|_\alpha \leq \delta$  ist, und können deshalb auch gut durch diese linearen Projektionen approximiert werden:

$$(2.16) \quad \begin{cases} |D\pi^{cu}(x) - P_0^+ P_0^{cu}|_\alpha &\leq \delta \\ |D\pi^s(x) P_0^s|_\alpha &\leq \delta. \end{cases}$$

Der Definitionsbereich  $D_\epsilon$  unserer Schnitte wird hier beschrieben durch die Bilder der Abbildungen

$$\begin{aligned} (2\epsilon, b_0) \times U_{\kappa_0 \epsilon}(E_0^+ \cap E_0^{cu}) &\longrightarrow X^\alpha \\ (b, v) &\longmapsto b + h_+(b e_+) + v, \end{aligned}$$

im wesentlichen also durch die Punkte  $(b, v)$  plus Terme von der Größenordnung  $\delta$ .

Wir werden nun zuerst die störende Nichtlinearität weglassen und die Minimumnormen für die so erhaltene, modifizierte Gleichung abschätzen. Dazu betrachte eine Lösung  $x(t)$  von (2.15), die für  $t \in [0, T]$  ganz in  $E_\epsilon^s$  verläuft. Dann bilden wir die modifizierte Variationsgleichung entlang  $x(t)$ , d.h. wir lassen die Ableitung der Nichtlinearität  $Df(x)$  weg. Den zugehörigen linearen Halbfluß nennen wir  $\tilde{T}(t, x_0)$ . Diese Halbgruppe löst dann die Differentialgleichung

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= -Ay + DB_\epsilon^+(x) y \\ &= -Ay + D\chi_\epsilon^+(Q_0^+ \pi(x)) Q_0^+ y \chi_{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 P_0^+ P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \chi_\epsilon^+ D\chi \left( \frac{|P_0^{cu,s} \pi^{cu} x|}{\kappa_0 \epsilon} \right) \frac{1}{\kappa_0 \epsilon} P_0^+ \beta_0 \cdot \\ & \left\langle |P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|^{-1} \cdot P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x), P_0^{cu,s} D\pi^{cu}(x) y \right\rangle \cdot P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) + \\ & \chi_\epsilon^+ \chi_{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 P_0^{cu,s} \left( P_0^+ - Dh_+(Q_0^+ x) Q_0^+ \right) y. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.13** *Wir beachten, daß wegen*

$$P_0^{cu} D\pi^{cu}(x) = P_0^{cu} P_0^\pm \left( id - Dh_\pm((1 - P^0) x) Q_0^\pm \right)$$

$DB^\pm(x)y$  tatsächlich nur von  $P_0^{cu}y$  abhängt. Ferner gilt  $|DB_\epsilon^+(x)|_\alpha \leq C(\kappa_0)$ , denn für  $x \in \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon$  gilt insbesondere  $|\pi^{cu}(x)| \leq \kappa_0 \epsilon$ .

**Bemerkung 2.14** *Für den linearen Halbfluß  $\tilde{T}(t, x_0)$  mit  $x(0) = x_0$  gilt für  $0 < t \leq T$*

$$|\tilde{T}(t, x_0)|_\alpha \leq C(\kappa_0).$$

**Beweis.** Die Behauptung folgt aus  $|DB_\epsilon^+(x(t))|_\alpha \leq C(\kappa_0)$ . □

Die Gleichung (2.17) muß nun abgeschätzt werden. Wir sehen, daß die stabilen und instabilen Teile von Gleichung (2.17) entkoppelt sind. Mit  $P_0^s y =: w$  erhalten wir die Gleichung

$$(2.18) \quad \dot{w} + Aw = 0.$$

Der instabile Teil ist mit  $P_0^{cu} y =: u$  durch die Gleichung

$$\begin{aligned} (2.19) \quad \dot{u} &= -Au + D\chi_\epsilon^+(Q_0^+ x) Q_0^+ u \chi_{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 P_0^+ P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) + \\ & \chi_\epsilon^+ D\chi \left( \frac{|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|}{\kappa_0 \epsilon} \right) \frac{1}{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 \cdot \\ & \left\langle |P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|^{-1} \cdot P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x), P_0^{cu,s} D\pi^{cu}(x) u \right\rangle \cdot P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) + \\ & \chi_\epsilon^+ \chi_{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 P_0^{cu,s} \left( P_0^+ - Dh_+(Q_0^+ x) Q_0^+ \right) u \\ & =: L(t)u \end{aligned}$$

gegeben.

**Lemma 2.15** *Für die Minimumnorm der Fundamentalmatrix  $U(T)$  von  $\dot{u} = L(t)u$  auf  $E_0^{cu}$  gilt die Abschätzung*

$$m(U(T)) \geq e^{-\alpha^s T}.$$

**Beweis.** Wir bilden das Skalarprodukt  $\langle L(t)u, u \rangle$  und erhalten zusammen mit der Zerlegung von  $-A P_0^{cu}$  die Identität

$$\langle L(t)u, u \rangle = \langle \Delta u, u \rangle + \langle J u, u \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& D\chi_\epsilon^+(Q_0^+ x) Q_0^+ u \chi_{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 \left\langle P_0^+ P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x), u \right\rangle + \\
& \chi_\epsilon^+ D\chi \left( \frac{|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|}{\kappa_0 \epsilon} \right) \frac{1}{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 \left\langle P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x), P_0^{cu,s} u \right\rangle \cdot \\
& \left\langle |P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|^{-1} \cdot P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x), P_0^{cu,s} D\pi^{cu}(x) u \right\rangle + \\
& \chi_\epsilon^+ \chi_{\kappa_0 \epsilon} \beta_0 \left\langle P_0^{cu,s} \left( P_0^+ - Dh_+(Q_0^+ x) Q_0^+ \right) u, u \right\rangle.
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Ungleichungen  $|D\pi^{cu}(x) - P_0^+ P_0^{cu}|_\alpha \leq C_0 \delta$ ,  $|\pi^{cu}(x)| \leq \kappa_0 \epsilon$  sowie  $D\chi > 0$  und erhalten dann wegen  $\operatorname{Re} \langle \Delta u, u \rangle - \|J\| \geq -\tilde{\alpha}^s > -\alpha^s$  die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|u|^2} \left\langle L(t) u, u \right\rangle & \geq -\tilde{\alpha}^s - C_0 \epsilon (1 + C(T) K(\chi) \beta_0) + \\
& \chi_\epsilon^+ D\chi \beta_0 \frac{1}{\kappa_0 \epsilon} |P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|^{-1} \left\langle P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x), P_0^{cu,s} u \right\rangle^2 \frac{1}{|u|^2} - \\
& C(T) K(\chi) \beta_0 \delta + \beta_0 (1 - C_0 \delta) \\
& \geq -\tilde{\alpha}^s + C(T) \delta + o_\epsilon \geq -\alpha^s,
\end{aligned}$$

sofern nur  $\delta$  in Abhängigkeit von einer Konstanten  $C(T)$  und  $\epsilon$  hinreichend klein sind. Hier haben wir bei der Abschätzung des letzten Terms die Orthogonalität der Spektralprojektionen ausgenutzt. Aus [22, Lemma IV.4.2] folgt dann, daß für die Minimumnorm der Fundamentalmatrix  $U(t)$  die gewünschte Ungleichung  $m(U(t)) \geq e^{-\alpha^s t}$  gilt.  $\square$

Damit können wir nun die Existenz des Rechtsinversen auf  $D_\epsilon^+$  zeigen.

**Lemma 2.16** *Für  $\delta < C(T)^{-1}$  und  $\epsilon \leq \epsilon_0$  hinreichend klein existiert ein Rechtsinverses  $g_\sigma$  von  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  auf  $D_\epsilon^+$  für jedes  $\sigma \in \Sigma_\epsilon$ . Außerdem gilt*

$$\begin{aligned}
L_x(g_\sigma) & \leq e^{\alpha^s T} + C(T) \delta + \kappa_0 \epsilon \\
L_x\left(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)\right) & \leq K e^{-\alpha^s T} + C(T) \delta
\end{aligned}$$

und

$$L_x\left(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma\right) \leq 1.$$

Weiterhin ist  $\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma : D_\epsilon^+ \rightarrow E_\epsilon^s|_{D_\epsilon^+}$  ein Schnitt des stabilen Vektorbündels mit Werten in  $E_\epsilon^s|_{D_\epsilon^+}$ .

**Beweis.** Wir zeigen zuerst das Überfließen des Definitionsbereichs. Dazu sei  $x \in D_\epsilon^+$  mit  $|\pi^{cu}(x)|_\alpha = \kappa_0 \epsilon$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt} \pi^{cu}(x), \pi^{cu}(x) \right\rangle & = \left\langle D\pi^{cu}(x) \left( -Ax + f(x) + B_\epsilon^+(x) \right), \pi^{cu}(x) \right\rangle \\
& = \left\langle D\pi^{cu}(x) \left( -A(\pi(x) + \pi^{cu}(x) + \pi^s(x)) + f(x) + B_\epsilon^+(x) \right), \pi^{cu}(x) \right\rangle \\
& = \left\langle D\pi^{cu}(x) \left( -A\pi^{cu}(x) + f(x) - f(\pi(x)) + B_\epsilon^+(x) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D\pi^{cu}(x) \left( -A\pi(x) + f(\pi(x)) \right), \pi^{cu}(x) \rangle \\
&= \left\langle D\pi^{cu}(x) \left( -A\pi^{cu}(x) + f(x) - f(\pi(x)) + B_\epsilon^+(x) \right), \pi^{cu}(x) \right\rangle \\
&= \left\langle P_0^{cu} P_0^+ \left( id + Dh(Q_0^+ x) Q_0^+ \right) \left( -A P_0^{cu} P_0^+ (x + h(Q_0^+ x)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. f(x) - f(\pi(x)) + \beta_0 P_0^{cu} P_0^+ (x + h(Q_0^+ x)) \right), \pi^{cu}(x) \right\rangle \\
&= \left\langle -A \pi^{cu}(x) + \beta_0 \pi^{cu}(x) + D\pi^{cu}(x) \left( f(x) - f(\pi(x)) \right), \pi^{cu}(x) \right\rangle \\
&\geq (\beta_0 - \alpha^s - C(T) \delta) (\kappa_0 \epsilon)^2.
\end{aligned}$$

Denn der Term  $D\pi^{cu}(x) \left( -A\pi(x) + f(\pi(x)) \right)$  verschwindet, da  $-A\pi(x) + f(\pi(x))$  im Bild von  $D\pi(x)$  liegt und  $D\pi^{cu}(x) D\pi(x) = 0$  ist. Außerdem gilt  $|Df| \leq \delta$  und daher auch  $|f(x) - f(\pi(x))| \leq \delta |x - \pi(x)| \leq \delta \kappa_0 \epsilon$ . Aus der gezeigten Abschätzung folgt dann, daß die Norm von  $\pi^{cu}(x)$  wächst und daher die Lösung den Definitionsbereich verlassen wird. Nun wenden wir uns der lokalen Existenz des Rechtsinversen zu. Aus Bemerkung 2.14 und  $|Df| \leq \delta$  folgt zunächst, daß sich die modifizierte und die volle Linearisierung entlang einer ganz in  $E_\epsilon^s$  verlaufenden Lösung mit Anfangswert  $x_0$  nur wenig unterscheiden. Es gilt

$$(2.20) \quad |\mathcal{T}(T, x_0) - \tilde{\mathcal{T}}(T, x_0)|_\alpha \leq C(T) \delta.$$

Damit und mit Gleichung (2.16) folgt für  $u_i = b_i + h_+(b_i) + v_i \in D_\epsilon^l$  nahe bei  $x_0$  für  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
(2.21) \quad & |\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)(u_1 + \sigma(u_1)) - \hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)(u_2 + \sigma(u_2))|_\alpha \\
& \geq |D\hat{\pi}^{cu}(x_0) \mathcal{T}(T, x_0) (u_1 + \sigma(u_1) - u_2 - \sigma(u_2))|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\
& \geq |P_0^{cu} \mathcal{T}(T, x_0) (u_1 + \sigma(u_1) - u_2 - \sigma(u_2))|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\
& \geq |\tilde{\mathcal{T}}(T, x_0) P_0^{cu} (u_1 + \sigma(u_1) - u_2 - \sigma(u_2))|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\
& \geq |\tilde{\mathcal{T}}(T, x_0) (b_1 + v_1 - b_2 - v_2)|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\
& \geq e^{-\alpha^s T} |b_1 + v_1 - b_2 - v_2|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\
& \geq e^{-\alpha^s T} |u_1 - u_2|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha,
\end{aligned}$$

denn es gilt ja

$$(2.22) \quad |b_1 + v_1 - b_2 - v_2|_\alpha \geq |u_1 - u_2|_\alpha - |h_+(b_1) - h_+(b_2)|_\alpha \geq (1 - \delta) |u_1 - u_2|_\alpha.$$

Deshalb können wir lokal ein Rechtsinverses bilden. Wir müssen wieder die globale Injektivität von  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  nachweisen. Dazu zerlegen wir die Differentialgleichung wie folgt:

$$(2.23) \quad \dot{x} = -Ax + f(\pi(x)) + B_\epsilon^+(x) + \left( f(x) - f(\pi(x)) \right).$$

Wegen  $|Df(x)| \leq \delta$  und  $|D\pi(x)|_\alpha \leq C_0$  gilt

$$(2.24) \quad |Df(x) - Df(\pi(x)) D\pi(x)| \leq C_0 \delta.$$



Wir lassen den Term  $f(x) - f(\pi(x))$  in Gleichung (2.23) daher zunächst einfach weg und betrachten die Gleichung

$$(2.25) \quad \dot{x} = -Ax + f(\pi(x)) + B_\epsilon^+(x).$$

Dann ist diese Gleichung für einen Anfangswert  $x_0 \in D_\epsilon^+$  auf dem Zeitintervall  $[0, T]$  wohldefiniert, da die Lösungen von (2.23) und (2.25) sich in der Zeitspanne  $T$  nach Lemma 2.7 und Bemerkung 2.24 um höchstens  $C(T) \delta \kappa_0 \epsilon$  voneinander entfernt haben, und deshalb die Lösung der modifizierten Gleichung (2.25) stets im Definitionsbereich von  $\pi$  und  $\pi^{cu}$  bleibt.

Wir beachten jetzt, daß Gleichung (2.25) entkoppelt. Denn schreiben wir eine Lösung  $x(t)$  von (2.25) in der Form  $q(t) + y(t)$ , wobei  $q(0) \in \gamma(q_0)$  und  $y(0) \in E_0^+$  ist, dann sehen wir leicht, daß in dieser Zerlegung die folgenden Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$(2.26) \quad \begin{cases} \dot{q} &= -Aq + f(q) \\ \dot{y} &= -Ay + \chi^+(Q_0^+ q) \chi_{\kappa_0 \epsilon}(|P_0^{cu,s} y|) \beta_0 P_0^{cu,s} y. \end{cases}$$

Denn jede Lösung von (2.26) ist wieder in  $q(t) \in \gamma(q_0)$  und  $y(t) \in E_0^+$  zerlegt und erfüllt deshalb  $\pi(x) = q$  und  $\pi^i(x) = P_0^i y$  für  $i = s, cu$ . Nun transformieren wir (2.26) vermöge  $q = b e_+ + h_+(b e_+)$  auf einen konvexen Bereich und gelangen zu der Differentialgleichung

$$(2.27) \quad \begin{cases} \dot{b} &= -A b e_+ + Q_0^+ f(b e_+ + h_+(b)) \\ \dot{y} &= -A y + \chi^+(b e_+) \chi_{\kappa_0 \epsilon}(|P_0^{cu,s} y|) \beta_0 P_0^+ P_0^{cu,s} y. \end{cases}$$

Dann ist der Unterraum  $RP_0^+ E_0^{cu}$  invariant unter dem zu (2.27) gehörendem Fluß  $\tilde{\Phi}$ . Außerdem gilt die globale Abschätzung

$$|\tilde{\Phi}_T(b_1 + v_1) - \tilde{\Phi}_T(b_2 + v_2)|_\alpha \geq (e^{-\alpha^s T} + C(T) \delta) |b_1 + v_1 - b_2 - v_2|_\alpha$$

für  $v_i \in E_0^+ \cap E_0^{cu}$  und  $i = 1, 2$ . Dies folgt wie in Lemma 2.15 unter Benutzung der Konvexität des Gebietes und einer Zeitumkehr auf  $E_0^{cu}$ . Die globale Injektivität folgt nun leicht, indem man die Lösungen  $\Phi_T$  von (2.23) und  $\tilde{\Phi}_T$  von (2.27) wie in Gleichung (2.21) global miteinander vergleicht. Dabei beachten wir, daß sich wegen (2.24) die beiden Zeit  $T$ -Abbildungen  $\Phi_T$  und  $\tilde{\Phi}_T$  nur um einen Term mit Lipschitzkonstante  $C(T) \delta$  unterscheiden:

$$\begin{aligned} & |\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)(u_1) - \hat{\pi}^{cu} \circ \tilde{\Phi}_T \circ (id + \sigma)(u_2)|_\alpha \\ & \geq |P_0^{cu} \Phi_T(u_1 + \sigma(u_1)) - P_0^{cu} \tilde{\Phi}_T(u_2 + \sigma(u_2))|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\ & \geq |P_0^{cu} \tilde{\Phi}_T(u_1 + \sigma(u_1)) - P_0^{cu} \tilde{\Phi}_T(u_2 + \sigma(u_2))|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\ & \geq e^{-\alpha^s T} |u_1 - u_2|_\alpha - \delta C(T) |u_1 - u_2|_\alpha \\ & = (e^{-\alpha^s T} - \delta C(T)) |u_1 - u_2|_\alpha. \end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder (2.22) benutzt. Wir haben also die Existenz eines Rechtsinversen auf  $D_\epsilon^+$  bewiesen. Zuletzt müssen wir noch die Lipschitzkonstante von  $\Phi_T^\#(\sigma)$  abschätzen. Dies folgt unter Beachtung der Gleichungen (2.18) und (2.20) wie in Lemma 2.12. Aus

(2.18) folgt auch leicht, daß die Werte von  $\Phi_T^\#(\sigma)$  wieder in  $E_\epsilon^s$  liegen.  $\square$

III.  $\hat{\pi}^{cu}(x) \in D_\epsilon^l$ .

Die Differentialgleichung (2.11) sei hier nochmals wiederholt.

$$\begin{aligned}
(2.28) \quad \dot{x} &= -A P_0^s x + P_0^s f(x) - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) P_0^s x + \\
&\quad \left( -A P_0^{cu} x + P_0^{cu} f(x) + \beta_0 \left( \chi_{\kappa_0 \epsilon}(|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \chi_\epsilon^+(Q_0^+ \pi(x)) P_0^+ + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \chi_\epsilon(|P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x)|) \chi_\epsilon^-((1 - P_0^-) \pi(x)) P_0^- \right) P_0^{cu,s} \pi^{cu}(x) \right) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) \\
&= -A P_0^s x + P_0^s f(x) - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) P_0^s x + \\
&\quad \left( -A P_0^{cu} x + P_0^{cu} f(x) + B^+(x) + B^-(x) \right) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x).
\end{aligned}$$

Es sei  $x(t) \in D_\epsilon^l$  eine Lösung von (2.28). Wir werden in der zugehörigen Variationsgleichung die Nichtlinearität  $P_0^s f(x) + P_0^{cu} f(x) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x)$  zunächst weglassen. Die so modifizierte Variationsgleichung entlang  $x(t)$  sieht dann wie folgt aus

$$\begin{aligned}
(2.29) \quad \dot{y} &= -A P_0^s y - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) P_0^s y - \beta_1 \epsilon^{-1} \left( D\chi^s(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) P_0^{cu} y \right) P_0^s x + \\
&\quad \left( -A P_0^{cu} + DB_\epsilon^+(x) + DB_\epsilon^-(x) \right) y \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) + \\
&\quad \left( -A P_0^{cu} x + B_\epsilon^+(x) + B_\epsilon^-(x) \right) \epsilon^{-1} D\chi^{cu}(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) P_0^{cu} y.
\end{aligned}$$

Hier wird nun die Minimumnorm vom Anfangswert abhängen, d.h. wir haben in der Terminologie von [24] keine absolute, sondern nur noch eine relative normale Hyperbolizität. Wir führen deshalb eine weitere Bezeichnung ein. Es sei

$$a(x_0) := \int_{[0,T]} \varphi_{I(x_0)}(t) dt,$$

wobei  $\varphi_{I(x_0)}$  die charakteristische Funktion der Menge  $I(x_0)$  ist und

$$I(x_0) := \left\{ t \in [0, T] / P_0^{cu} x(t) \in \text{Cl} U_\eta(A) \right\}$$

die Menge derjenigen Zeitpunkte sei, für die die Projektion der Lösung  $x(t)$  auf  $E_0^{cu}$  in der Menge  $\text{Cl} U_\eta(A)$  verweilt. Vergleiche dazu Gleichung (2.9).

**Lemma 2.17** *Für die Lösung  $\tilde{T}(T, x_0)$  der modifizierten Variationsgleichung (2.29) gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
m(\tilde{T}(T, x_0) P_0^{cu}) &\geq e^{-\alpha^s(T-a(x_0))} e^{-\gamma_1 a(x_0)} \\
|\tilde{T}(T, x_0) P_0^s|_\alpha &\leq K e^{-\alpha^{ss} T} e^{-\beta_1 a(x_0)} + \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi),
\end{aligned}$$

wobei  $\gamma_1 = C_0 \tilde{K}(\chi) C(\kappa_0)$  ist und  $\beta_1$  in (2.10) definiert war.

**Beweis.** In den Koordinaten  $v = P_0^{cu} y$  und  $w = P_0^s y$  ist die Gleichung (2.29) durch

$$(2.30) \quad \begin{cases} \dot{v} = \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) \left( -A + DB_\epsilon^+(x) + DB_\epsilon^-(x) \right) v + \\ \quad \left( -A P_0^{cu} x + B_\epsilon^+(x) + B_\epsilon^-(x) \right) \epsilon^{-1} D\chi_\epsilon^{cu}(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) v \end{cases}$$

$$(2.31) \quad \dot{w} = -Aw - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) w - \beta_1 \epsilon^{-1} \left( D\chi_\epsilon^s(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) v \right) P_0^s x$$

gegeben. Beachte dabei Bemerkung 2.13. Wir sehen, daß die Gleichung (2.30) auf  $E_0^{cu}$  entkoppelt. Zunächst berechnen wir die Minimumnorm von  $\tilde{T}(T, x_0)$  auf  $E_0^{cu}$ . Dazu schätzen wir (2.30) jeweils getrennt für  $t \in I(x_0)$  und  $t \notin I(x_0)$  ab.

Solange  $t \notin I(x_0)$  ist, gilt  $\chi_\epsilon^{cu} \equiv 1$  und  $D\chi_\epsilon^{cu} \equiv 0$ . Deshalb geht (2.30) in die Gleichung

$$\dot{v} = \left( -A + DB_\epsilon^+(x) + DB_\epsilon^-(x) \right) v$$

über und die Minimumnorm kann für  $0 \leq t \leq t + \tau \leq T$  und  $[t, t + \tau] \cap I(x_0) = \emptyset$  wie in Teil II. durch

$$(2.32) \quad m(\tilde{T}(t + \tau, t, x_0)) \leq e^{-\alpha^s \tau}$$

nach unten abgeschätzt werden.

Falls nun  $t \in I(x_0)$  ist, schätzen wir das Vektorfeld durch die Norm nach oben ab:

$$\begin{aligned} & \left| \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) \left( -A + DB_\epsilon^+(x) + DB_\epsilon^-(x) \right) v + \right. \\ & \quad \left. \left( -A P_0^{cu} x + B_\epsilon^+(x) + B_\epsilon^-(x) \right) \epsilon^{-1} D\chi_\epsilon^{cu}(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) v \right| \\ & \leq C_0 K(\chi) \tilde{K}(\chi) |v| =: \gamma_1 |v|, \end{aligned}$$

denn es gilt ja  $|P_0^{cu} x| \leq 3\epsilon$ . Wir beachten hier, daß die Norm von  $DB_\epsilon^\pm$  gleichmäßig in  $\epsilon$  durch eine Konstante  $C(T)$  abgeschätzt werden kann. Denn die von  $\epsilon$  abhängige Ableitung von  $\chi_\epsilon^\pm$  - vergleiche hier Abbildung 9 - liegt nach Konstruktion immer innerhalb von  $A$  und dort war  $\chi_\epsilon^{cu} \equiv 0$ . Daher erhalten wir in diesem Bereich für  $0 \leq t \leq t + \tau \leq T$  und  $[t, t + \tau] \subset I(x_0)$  stets

$$(2.33) \quad m(\tilde{T}(t + \tau, t, x_0) P_0^{cu}) \leq e^{-\gamma_1 \tau}.$$

Durch Zusammensetzen der oben erreichten Abschätzungen gelangen wir schließlich zu der Ungleichung

$$m(\tilde{T}(T, x_0) P_0^{cu}) \geq e^{-\alpha^s(T-a(x_0))} e^{-\gamma_1 a(x_0)}.$$

Hierbei war wichtig, daß in den Abschätzungen die Konstante  $K$  aufgrund der Zerlegung  $-A P_0^{cu} = \Delta + J$  in  $\Delta$  und  $J$  mit  $\|J\|$  klein nicht vorkam.

Nun betrachten wir die Gleichung (2.31) auf dem stabilen Raum  $E_0^s$

$$\dot{w} = -Aw - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) w - \beta_1 \epsilon^{-1} \left( D\chi_\epsilon^s(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) v \right) P_0^s x.$$

Wir lassen zunächst den Kopplungsterm  $\beta_1 \epsilon^{-1} (D\chi^s(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) v) P_0^s x$  weg. Dann erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \tilde{w} = -A\tilde{w} - \beta_1 \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x) \tilde{w}$$

mit der expliziten Lösung

$$\tilde{w}(t) = e^{-\beta_1 \int_0^t \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x(\tau)) d\tau} e^{-At} \tilde{w}_0.$$

Wir können daher die zugehörige Halbgruppe  $\tilde{W}(t, x_0)$  mit

$$|\tilde{W}(T)|_\alpha \leq K e^{-\alpha^{ssT}} e^{-\beta_1 a(x_0)}$$

abschätzen. Beachte nämlich, daß

$$\int_0^T \chi_\epsilon^s(P_0^{cu} x(\tau)) d\tau \geq a(x_0)$$

gilt, da nach Definition  $\{\chi^{cu} > 0\} \subset \{\chi^s = 1\}$  ist und  $\chi^s \geq 0$  gilt. Nun müssen wir noch den Kopplungsterm  $\beta_1 \epsilon^{-1} (D\chi^s(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) v) P_0^s x$  berücksichtigen. Diesen Term können wir aber durch

$$\left| \beta_1 \epsilon^{-1} \left( D\chi^s(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) v \right) P_0^s x \right|_\alpha \leq \beta_1 \epsilon^{-1} \tilde{K}(\chi) |P_0^s x|_\alpha \leq \beta_1 \kappa_1 \tilde{K}(\chi)$$

abschätzen, da  $x(t)$  nach Voraussetzung ganz in  $E_\epsilon^s$  bleibt. Damit erhalten wir für die Lösung  $\tilde{T}(T, x_0)$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} W(T) &= \tilde{W}(T) + \int_0^T \tilde{W}(T, s) \beta_1 \epsilon^{-1} \left( D\chi^s(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x(s)) V(s) \right) P_0^s x ds \\ |W(T)|_\alpha &\leq |\tilde{W}(T)|_\alpha + \int_0^T K e^{-\alpha^{ss(T-s)}} \beta_1 \kappa_1 \tilde{K}(\chi) e^{\gamma_1 s} ds \\ &\leq K e^{-\alpha^{ssT}} e^{-\beta_1 a(x_0)} + \beta_1 C_0 \tilde{K}(\chi) \kappa_1 e^{\gamma_1 T}, \end{aligned}$$

wobei  $V(t)$  die Lösung der entkoppelten Gleichung auf  $E_0^{cu}$  ist. Diese können wir immer durch  $e^{\gamma_1 t}$  mit einer Konstanten  $\gamma_1 = C_0 K(\tilde{\chi}) C(\kappa_0)$  nach oben abschätzen, vergleiche dazu auch Bemerkung 2.13. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Nun werden wir noch die in Lemma 2.17 vernachlässigte Nichtlinearität

$$P_0^s f(x) + P_0^{cu} f(x) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x)$$

berücksichtigen.

**Bemerkung 2.18** *Es gilt*

$$\left| D \left( P_0^s f(x) + P_0^{cu} f(x) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) \right) \right| \leq o_\epsilon.$$

**Beweis.** Wir berechnen die Ableitung

$$\begin{aligned} D\left(P_0^s f(x) + P_0^{cu} f(x) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x)\right) = \\ P_0^s Df(x) + P_0^{cu} Df(x) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) + P_0^{cu} f(x) \epsilon^{-1} D\chi_\epsilon^{cu}(\epsilon^{-1} P_0^{cu} x) P_0^{cu} \end{aligned}$$

und unter Verwendung von  $|f(x)| \leq C_0 |x|_\alpha^{1+\rho}$ ,  $|Df(x)| \leq C_0 |x|_\alpha^\rho$  und  $|x|_\alpha \leq 3\epsilon$  erhalten wir

$$\left| D\left(P_0^s f(x) + P_0^{cu} f(x) \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x)\right) \right| \leq C_0 \tilde{K}(\chi) \epsilon^\rho = o_\epsilon.$$

□

Daher ist die Ableitung der Nichtlinearität klein und der Einfluß auf die Variationsgleichung ist daher von der Ordnung  $o_\epsilon$ . Damit ergibt sich für die volle Variationsgleichung  $\mathcal{T}(T, x_0)$  von (2.28) schließlich folgendes Lemma.

**Lemma 2.19** *Es gilt*

$$\begin{aligned} m\left(P_0^{cu} \mathcal{T}(T, x_0)|_{E_0^{cu}}\right) &\geq e^{-\alpha^s(T-a(x_0))} e^{-\gamma_1 a(x_0)} + o_\epsilon \\ |P_0^s \mathcal{T}(Tx_0)|_{E_0^s}|_\alpha &\leq K e^{-\alpha^{ss}T} e^{-\beta_1 a(x_0)} + \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi) + o_\epsilon \\ |P_0^s \mathcal{T}(Tx_0)|_{E_0^{cu}}|_\alpha &\leq o_\epsilon \\ |P_0^{cu} \mathcal{T}(Tx_0)|_{E_0^s}|_\alpha &\leq o_\epsilon. \end{aligned}$$

**Beweis.** Dies folgt aus Lemma 2.17 und Bemerkung 2.18. □

Jetzt können wir die Existenz des Rechtsinversen auf  $D_\epsilon^l$  zeigen.

**Definition.** Wir definieren durch

$$m_x(g) = \liminf_{y \rightarrow x, y \in D_\epsilon} \frac{|g(x) - g(y)|_\alpha}{|x - y|_\alpha}.$$

die Minimumnorm  $m(g)$  einer Abbildung  $g : D_\epsilon \rightarrow X^\alpha$ .

**Lemma 2.20** *Auf  $D_\epsilon^l$  existiert ein Rechtsinverses  $g_\sigma$  von  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  für jedes  $\sigma \in \Sigma_\epsilon$ , sofern  $\epsilon < \epsilon_0$  hinreichend klein ist. Ferner gilt mit  $x = g_\sigma(x_0)$*

$$\begin{aligned} L_{x_0}(g_\sigma) &\leq e^{\alpha^s(T-a(x))} e^{\gamma_1 a(x)} + o_\epsilon \\ L_{x_0}(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)) &\leq K e^{-\alpha^{ss}T} e^{-\beta_1 a(x)} + \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi) + o_\epsilon. \end{aligned}$$

Außerdem ist für  $\kappa_1 < \left(C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi)\right)^{-1}$  und  $\epsilon \leq \epsilon_0$  hinreichend klein

$$L_{x_0}(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma) \leq 1$$

und  $\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma : D_\epsilon^l \rightarrow E_\epsilon^s|_{D_\epsilon^l}$  ist eine Abbildung nach  $E_\epsilon^s$  mit Werten in  $E_\epsilon^s|_{D_\epsilon^l}$ .

**Beweis.** Es sei also  $\sigma \in \Sigma_\epsilon$  ein zulässiger Graph. Wir zeigen zuerst das Überfließen. Für  $P_0^{cu} x \in A$  verschwindet die  $E_0^{cu}$ -Komponente des Vektorfeldes identisch, während für  $x \in D_\epsilon^+$  und  $|\pi^{cu}(x)| = \kappa_0 \epsilon$  die  $E_0^{cu}$ -Komponente nach außen zeigt

$$\begin{aligned} & \left\langle \chi_\epsilon^{cu}(P_0^{cu} x) \left[ (\Delta + J + \beta_0 P^{cu,s}) \pi^{cu}(x) + f(\pi^{cu}(x)) \right], \pi^{cu}(x) \right\rangle \\ & \geq (\beta_0 - \alpha^s - O(\epsilon)) |\pi^{cu}(x)|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt das Überfließen des Definitionsbereichs. Wir wollen  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  lokal invertieren. Nun gilt aber für  $u_i \in E_0^{cu}$  nahe bei  $x$  mit  $u_i = b_i + \tilde{\chi}(b_i e_\pm) h_\pm(b_i e_\pm) + v_i$  für  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} & |\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)(u_1) - \hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)(u_2)|_\alpha \\ & \geq |P_0^{cu} \tilde{\mathcal{T}}(T, x_0)(b_1 + v_1 - b_2 - v_2)|_\alpha + o_\epsilon |u_1 - u_2|_\alpha \\ & \geq (e^{-\alpha^s(T-a(x))} e^{-\gamma_1 a(x)} + o_\epsilon) |u_1 - u_2|_\alpha \end{aligned}$$

wegen Lemma 2.17 und 2.19. Daraus folgt die Existenz eines lokalen Rechtsinversen. Nun passen die so gefundenen lokalen Rechtsinversen aber zusammen, da  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$  global injektiv auf  $D_\epsilon^l$  ist. Denn zunächst folgt für den modifizierten Fluß (mit weggelassener Nichtlinearität) auf  $E_0^{cu}$  in der Rückwärtszeitrichtung, daß zwei Lösungen sich nach der Zeit  $-T$  höchstens um  $2e^{\gamma_1 T}$  voneinander entfernt haben. Das bedeutet, daß sich zwei Lösungen höchstens um den Faktor  $2e^{-\gamma_1 T}$  in der Zeit  $T$  annähern können. Und da sich dieser modifizierte Fluß und der echte nur um eine Abbildung mit kleiner Lipschitzkonstante  $o_\epsilon$  unterscheiden, gilt dies auch für  $\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)$ . Wir beachten hier weiterhin, daß das Abschneiden des homoklinen Orbits durch  $\tilde{\chi}_\epsilon h_\pm$  und der damit verbundene Übergang des Definitionsbereichs  $D_\epsilon^l$  von  $E_0^{cu}$  zu der nichtlinearen Mannigfaltigkeit ebenfalls nur Ableitungen von der Ordnung  $o_\epsilon$  beisteuert. Damit ist die Existenz des Rechtsinversen gezeigt. Die Abbildung  $\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma$  hat dann wegen der Abschätzungen von  $P_0^s \mathcal{T}(T, x_0)$  in Lemma 2.19 wieder Werte in  $E_\epsilon^s$ . Aus Lemma 2.19 folgt auch leicht die Ungleichung für  $L_{x_0}(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))$ . Daher müssen wir nur noch die Lipschitzkonstante von  $\Phi_T^\#(\sigma)$  berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} L_{x_0}(\Phi_T^\#(\sigma)) & \leq L_{g_\sigma(x_0)}(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)) L_{x_0}(g_\sigma) \\ & \leq L_{g_\sigma(x_0)}(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma)) m_{g_\sigma(x_0)}(g_\sigma^{-1}) \\ & \leq \left( K e^{-\alpha^{ss} T} e^{-\beta_1 a(g_\sigma(x))} + \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi) + o_\epsilon \right) \cdot \\ & \quad \left( e^{\alpha^s(T-a(g_\sigma(x)))} e^{\gamma_1 a(g_\sigma(x))} + o_\epsilon \right) \\ & \leq K e^{-(\alpha^{ss} - \alpha^s)T} e^{-(\beta_1 + \alpha^s - \gamma_1) a(g_\sigma(x_0))} + \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi) e^{\gamma_1 T} + o_\epsilon \\ & < 1, \end{aligned}$$

denn wir können  $\kappa_1$  abhängig von  $C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi)$  aber unabhängig von  $\epsilon$  klein wählen; wir beachten dabei  $\gamma_1 = C_0 \tilde{K}(\chi) C(\kappa_0)$ . Ferner haben wir  $\beta_1 > \gamma_1$  nach (2.10) und

$|D\hat{\pi}^s - P_0^s| = o_\epsilon$  benutzt. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

#### IV. Die Existenz eines Fixpunkts von $\Phi_T^\#$ .

Mit den Lemmata 2.12, 2.16 und 2.20 haben wir gezeigt, daß die Abbildung  $\Phi_T^\# : \Sigma_\epsilon \rightarrow \Sigma_\epsilon$  wohldefiniert ist. Nun beweisen wir die Existenz eines Fixpunktes von  $\Phi_T^\#$  in  $\Sigma$ . Dazu brauchen wir noch folgende Bemerkung.

**Bemerkung 2.21** *Zu jedem  $\eta_0 > 0$  und  $L_0, m_0 > 0$  existiert ein  $\epsilon_0 > 0$ , so daß für alle  $\epsilon \leq \epsilon_0$  und alle  $x, y \in D_\epsilon$  mit  $|x - y|_\alpha \leq \epsilon_0$  folgendes gilt.*

(i) *Für alle  $g : D_\epsilon \rightarrow X^\alpha$  mit  $L(g) \leq L_0$  ist*

$$|g(x) - g(y)|_\alpha \leq L_0 (1 + \eta_0) |x - y|_\alpha.$$

(ii) *Für alle  $g : D_\epsilon \rightarrow X^\alpha$  mit  $m(g) \geq m_0$  ist*

$$|g(x) - g(y)|_\alpha \geq m_0 (1 - \eta_0) |x - y|_\alpha.$$

**Beweis.** Zunächst gilt für jedes  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  mit  $\limsup_{y \rightarrow x} \frac{|g(x) - g(y)|_\alpha}{|x - y|_\alpha} \leq L_0$  auch  $|g(x) - g(y)|_\alpha \leq L_0 |x - y|_\alpha$ . Denn zu jedem  $\kappa > 0$  existiert eine Umgebung  $U_{\epsilon(x)}(x)$  für alle  $x$  mit  $|g(x) - g(y)|_\alpha \leq L_0 (1 + \kappa) |x - y|_\alpha$  für  $y \in U_{\epsilon(x)}(x)$ . Nun seien  $x_0, x_1$  beliebig gewählt. Wir wählen eine Zerlegung der Strecke  $\overline{x_0 x_1}$  in disjunkte Teilstrecken  $\overline{y_i y_{i+1}}$  mit  $y_{i+1} \in U_{\epsilon(y_i)}(y_i)$ , was stets möglich ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} |g(x_0) - g(x_1)|_\alpha &\leq \sum |g(y_i) - g(y_{i+1})|_\alpha \\ &\leq \sum L_0 (1 + \kappa) |y_i - y_{i+1}|_\alpha \\ &= L_0 (1 + \kappa) |x_0 - x_1|_\alpha \end{aligned}$$

nach Wahl der  $y_i$ . Da  $\kappa$  beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir  $|g(x_0) - g(x_1)|_\alpha \leq L_0 |x_0 - x_1|_\alpha$ . Der Definitionsbereich  $D_\epsilon$  ist hier zwar eine (kompakte) Untermannigfaltigkeit und nicht der  $\mathbb{R}^n$ , aber wir können  $D_\epsilon$  gleichmäßig durch die Tangentialräume approximieren. Zu jedem  $\eta > 0$  existiert nämlich ein  $\epsilon_0 > 0$  mit der Eigenschaft

$$D_\epsilon \cap U_{\epsilon_0}(x) = \text{Graph}(h_x),$$

wobei  $h_x$  eine Abbildung  $h_x : U_{\epsilon_0}(0) \subset T_x D_\epsilon \rightarrow E_x^s$  mit  $|h_x(y_0) - h_x(y_1)|_\alpha \leq \eta |y_0 - y_1|_\alpha$  ist für jedes  $x \in D_\epsilon$  und jedes  $\epsilon < \epsilon_0$ . Dies folgt aus den Definitionen von  $D_\epsilon$  und  $\pi^{cu}$ . Daher erhalten wir für  $x_0, x_1 \in D_\epsilon$  mit  $|x_0 - x_1|_\alpha \leq \epsilon_0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |g(x_0) - g(x_1)|_\alpha &= |g(y_0 + h_x(y_0)) - g(y_1 + h_x(y_1))|_\alpha \\ &\leq L_0 (1 + \eta) |y_0 - y_1|_\alpha \\ &\leq L_0 \frac{1 + \eta}{1 - \eta} |x_0 - x_1|_\alpha. \end{aligned}$$

Der zweite Fall folgt analog und die Bemerkung ist bewiesen.  $\square$

**Lemma 2.22** Die Abbildung  $\Phi_T^\# : \Sigma_\epsilon \rightarrow \Sigma_\epsilon$  ist eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante

$$Ke^{-\alpha^{ssT}} + C(T)\delta + o_\epsilon + \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi).$$

Daher existiert ein eindeutiger Fixpunkt  $\sigma_* \in \Sigma_\epsilon$ .

**Beweis.** In diesem Beweis werden wir ein wenig bedenkenloser vorgehen. Eigentlich müssen wir hier wieder alle Abschätzungen getrennt in den drei Bereichen  $D^l$ ,  $D^\pm$  und  $D^f$  zeigen, werden dies aber nicht tun. Im Zweifelsfall möge der Leser dies nachrechnen. So wäre es zum Beispiel bei einigen der folgenden Ungleichungen korrekter, in den Bereichen  $D^l$  und  $D^\pm$  die Abschätzung

$$f(q+u) - f(q+\tilde{u}) = \int_0^1 Df(q+\tilde{u} + \tau(u-\tilde{u})) d\tau (u-\tilde{u})$$

anstelle von

$$f(q+u) - f(q+\tilde{u}) = Df(q)(u-\tilde{u}) + o_\epsilon |u-\tilde{u}|$$

zu verwenden.

Wir müssen  $\|\Phi_T^\#(\sigma) - \Phi_T^\#(\tilde{\sigma})\|$  abschätzen für  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma_\epsilon$ . Wir erhalten dann für diese Norm den Ausdruck

$$\begin{aligned} (2.34) \quad & |\Phi_T^\#(\sigma)(x) - \Phi_T^\#(\tilde{\sigma})(x)|_\alpha \\ &= |\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma(x) - \hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \tilde{\sigma}) \circ g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \\ &\leq |\hat{\pi}^s \Phi_T (id + \sigma) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x)|_\alpha + \\ &\quad |\hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \\ &\leq |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x)(\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x))|_\alpha + o_\epsilon |\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x)|_\alpha + \\ &\quad |\hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha. \end{aligned}$$

Zunächst behandeln wir den ersten Term in Gleichung (2.34). Aus den Beweisen der Lemmata 2.11, 2.16 und 2.20 angewendet auf  $x \in D_\epsilon^f$ ,  $D_\epsilon^+$  beziehungsweise auf  $D_\epsilon^l$  erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} (2.35) \quad & |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x)(\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x))|_\alpha \\ &\leq \left( Ke^{-\alpha^{ssT}} + o_\epsilon + C(T)\delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi) \right) |\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x)|. \end{aligned}$$

Anschließend schätzen wir den zweiten Term in (2.34) ab und berechnen zunächst  $|g_\sigma(x) - g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha$ . Nach Definition gilt

$$\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma = \hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \tilde{\sigma}) \circ g_{\tilde{\sigma}} = id_{D_\epsilon}$$

und

$$\begin{aligned} & \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \sigma) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x) \\ &= \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \sigma) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) + \\ &\quad \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x). \end{aligned}$$



Aus diesen Identitäten erhalten wir daher

$$\begin{aligned} & |\hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \\ &= |\hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \sigma) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x)|_\alpha. \end{aligned}$$

Nun wissen wir aus den Lemmata 2.12, 2.16 und 2.19, daß  $|g_\sigma(x) - g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \leq \epsilon$  gleichmäßig in  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$  gilt. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} & |\hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \\ &\geq \left( L_{g_\sigma x}(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T) + o_\epsilon \right) |g_\sigma(x) - g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} |g_\sigma(x) - g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha &\leq \left( L_{g_\sigma x}(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T) + o_\epsilon \right)^{-1} \\ &\quad \left| \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \sigma) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) \right|_\alpha. \end{aligned}$$

Wir müssen also noch den Ausdruck

$$|\hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \sigma)(x_0) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma})(x_0)|_\alpha$$

mit  $x_0 := g_\sigma(x)$  berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & |\hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \sigma)(x_0) - \hat{\pi}^{cu} \Phi_T (id + \tilde{\sigma})(x_0)|_\alpha \\ &= \left| \int_0^1 D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T) \left( x_0 + \tilde{\sigma}(x_0) + \tau (\sigma(x_0) - \tilde{\sigma}(x_0)) \right) (\sigma(x_0) - \tilde{\sigma}(x_0)) d\tau \right|_\alpha \\ &\leq \left( |D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)(x_0) D\hat{\pi}^s(x_0)|_\alpha + o_\epsilon \right) |\sigma(x_0) - \tilde{\sigma}(x_0)|_\alpha. \end{aligned}$$

Aus den Beweisen der Lemmata 2.11, 2.16 und 2.20 folgt diesmal die Ungleichung

$$(2.36) \quad \begin{aligned} & \left( L_{g_\sigma x}(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T) + o_\epsilon \right)^{-1} \left| D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)(g_\sigma x) D\hat{\pi}^s(g_\sigma x) \right|_\alpha \\ & \leq o_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Ungleichung

$$(2.37) \quad \begin{aligned} & |g_\sigma(x) - g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \\ & \leq \left( o_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi) \right) |\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x)|_\alpha. \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt (2.35) und (2.37) in Gleichung (2.34) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & |\Phi_T^\#(\sigma)(x) - \Phi_T^\#(\tilde{\sigma})(x)|_\alpha \\ & \leq |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x) (\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x))|_\alpha + o_\epsilon |\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x)|_\alpha + \\ & \quad |\hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \\ & \leq |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x) (\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x))|_\alpha + o_\epsilon |\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x)|_\alpha + \\ & \quad \left( |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x)|_\alpha + o_\epsilon \right) |g_\sigma(x) - g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha \\ & \leq \left( \left( K e^{-\alpha s s T} + o_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi) \right) + \right. \\ & \quad \left. \left( |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x)|_\alpha + o_\epsilon \right) \left( o_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi) \right) \right) |\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x)|_\alpha \\ & \leq \left( K e^{-\alpha s s T} + o_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi) \right) |\sigma(g_\sigma x) - \tilde{\sigma}(g_\sigma x)|_\alpha. \end{aligned}$$

Hier haben wir den Term

$$|\hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_\sigma(x) - \hat{\pi}^s \Phi_T (id + \tilde{\sigma}) g_{\tilde{\sigma}}(x)|_\alpha$$

mit der gleichen, bereits oben verwendeten Methode abgeschätzt.  $\square$

Wir bezeichnen den Graphen von  $\sigma_*$  mit  $W_{hom}^{cu}$ . Es gilt also  $W_{hom}^{cu} \subset \Phi_T W_{hom}^{cu}$ . Als nächstes zeigen wir eine Charakterisierung der durch Graph  $\sigma_*$  gegebene Fläche.

**Lemma 2.23** *Es sei  $x_{-n} \in E_\epsilon^s$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  eine Folge mit  $\Phi_T(x_{-n}) = x_{-(n-1)}$ . Dann gilt  $x_0 \in W_{hom}^{cu}$ .*

**Beweis.** Die Folge  $x_{-n}$  erfüllt insbesondere  $\text{dist}(x_{-n}, W_{hom}^{cu}) \leq 2\epsilon$ , denn es gilt ja  $|\pi^s(x)|_\alpha \leq \epsilon$  für alle  $x \in E_\epsilon^s$ . Aus der Kontraktionseigenschaft von  $\Phi_T^\#$  schließen wir zunächst, daß

$$\text{dist}(\Phi_T^n(x), W_{hom}^{cu}) \leq \kappa^n \text{dist}(x, W_{hom}^{cu})$$

für ein  $\kappa < 1$  und alle  $x \in E_\epsilon^s$  mit  $\Phi_T^j(x) \in E_\epsilon^s$  für  $1 \leq j \leq n$  gilt. Für die Folge  $x_{-n}$  erhalten wir daher unter Berücksichtigung von  $\Phi_T^n(x_{-n}) = x_0$

$$\text{dist}(x_0, W_{hom}^{cu}) = \text{dist}(\Phi_T^n(x_{-n}), W_{hom}^{cu}) \leq \kappa^n \text{dist}(x_{-n}, W_{hom}^{cu}) \leq 2\kappa^n \epsilon.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt deshalb  $\text{dist}(x_0, W_{hom}^{cu}) = 0$ .  $\square$

Wir haben daher eine Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  gefunden, die lokal invariant unter der Zeit  $T$ -Abbildung  $\Phi_T$  ist. Was wir aber tatsächlich konstruieren wollten, war eine Mannigfaltigkeit, die lokal invariant unter dem Halbfluß  $\Phi_t$  für  $t \geq 0$  ist. Dies liefert die folgende Bemerkung.

**Bemerkung 2.24**  *$W_{hom}^{cu}$  ist lokal invariant unter  $\Phi_t$  für  $t \geq 0$ .*

**Beweis.** Wir können die Graphentransformation auch mit  $\Phi_{\tilde{T}}$  anstelle von  $\Phi_T$  durchführen, sofern nur  $|\tilde{T} - T| \leq \eta$  gilt und  $\eta > 0$  hinreichend klein ist. Dann ist auch  $\Phi_{\tilde{T}}^\#(\sigma_*)$  in  $\Sigma_\epsilon$  enthalten. Außerdem gilt

$$\Phi_T \Phi_{\tilde{T}} W_{hom}^{cu} = \Phi_{\tilde{T}} \Phi_T W_{hom}^{cu} = \Phi_{\tilde{T}} W_{hom}^{cu}.$$

Deshalb ist auch  $\Phi_{\tilde{T}}^\#(\sigma_*) = \Phi_{\tilde{T}} W_{hom}^{cu}$  ein Fixpunkt von  $\Phi_{\tilde{T}}^\#$  und wir erhalten daher wegen der Eindeutigkeit schließlich die Identität  $\Phi_{\tilde{T}}^\#(\sigma_*) = \sigma_*$ . Mit  $\tilde{T} = T + t$  und  $0 \leq t \leq \eta$  folgt dann

$$W_{hom}^{cu} = \Phi_{\tilde{T}} W_{hom}^{cu} = \Phi_{T+t} W_{hom}^{cu} = \Phi_t W_{hom}^{cu}.$$

Durch Iteration folgt nun die Behauptung.  $\square$

### 2.3.3 Regularität

Schließlich weisen wir die Regularität von  $W_{hom}^{cu}$  nach. Wir beschränken uns dabei auf den Fall  $C^{k+\beta}$  mit  $\beta > 0$ , d.h. wir vermeiden den Fall der  $C^k$ -Regularität. Dies wird im allgemeinen keine große Einschränkung sein, der Beweis vereinfacht sich aber erheblich. Für den  $C^k$ -Fall vergleiche [24, Thm. 4.1] oder [20, Lemma A.3].

Im folgenden werden wir uns auf den Fall  $k = 1$  beschränken; der Fall höherer Differenzierbarkeit folgt analog.

Zunächst ist der Definitionsbereich  $D_\epsilon$  im allgemeinen nur in  $C^{1,\rho}$ , da die Nichtlinearität dann nur in  $C^{1,\rho}$  ist. Tatsächlich können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $D_\epsilon$  und das Bündel  $E_\epsilon^s$  in  $C^\infty$  sind.

**Bemerkung 2.25** *Es existiert ein  $C^\infty$ -Bündel  $\hat{E}_\epsilon^s$  über einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $\hat{D}_\epsilon$ , so daß folgendes gilt*

- (i)  $\hat{D}_\epsilon$  und  $\hat{E}_\epsilon^s$  sind in der  $C^1$ -Norm nahe an  $D_\epsilon$  und  $E_\epsilon^s$ .
- (ii) Der Fixpunkt  $\sigma_*$  kann als Graph  $\hat{\sigma}$  über  $\hat{D}_\epsilon$  in  $\hat{E}_\epsilon^s$  dargestellt werden.

**Beweis.** Es sei  $\eta > 0$  vorgegeben. Dann approximieren wir zuerst den Orbit  $q(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$  mit  $q(\cdot) \in C^1$  so durch eine  $C^\infty$ -Funktion  $\hat{q}(\cdot)$ , daß

$$\begin{aligned} |q(t) - \hat{q}(t)|_\alpha &\leq \eta \\ \left| \frac{d}{dt}(q(t) - \hat{q}(t)) \right|_\alpha &\leq \eta \\ \hat{q}(t) &\in \mathbb{R}e_+ \quad \text{für } t \geq \eta^{-1} \\ \hat{q}(t) &\in \mathbb{R}e_- \quad \text{für } t \leq -\eta^{-1} \end{aligned}$$

gilt. Dies erreicht man wie im endlich-dimensionalen durch Faltung mit einer glättenden Funktion (Mollifier). Jetzt können wir wieder nichtlineare  $C^\infty$ -Projektionen  $\pi$ ,  $\hat{\pi}^{cu}$  und  $\hat{\pi}^s$  definieren, die in der  $C^1$ -Norm  $\eta$  nahe an den ursprünglichen Projektionen sind. Statt als Definitionsbereich bei der Graphentransformation  $D_\epsilon$  zu verwenden, benutzen wir die neue  $C^\infty$ -Fläche  $\hat{D}_\epsilon$  und das zugehörige  $C^\infty$ -Bündel  $\hat{E}_\epsilon^s$ . Für  $\eta$  klein genug ist die Graphentransformation weiterhin wohldefiniert, denn die zusätzlichen Terme sind von der Ordnung  $\eta$  in  $C^1$  und das Überfließen ist ebenfalls gesichert für kleines  $\eta$ . Daher können wir die Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  als Lipschitzgraph  $\hat{\sigma}_*$  über der  $C^\infty$ -Fläche  $\hat{D}_\epsilon$  in das Bündel  $\hat{E}_\epsilon^s$  schreiben.  $\square$

Wir werden im folgenden die  $C^\infty$ -Approximationen wieder mit  $D_\epsilon$  und  $E_\epsilon^s$  bezeichnen. Als nächstes müssen wir erklären, was wir unter Hölderstetigkeit von Schnitten verstehen. Auf einer Untermannigfaltigkeit eines normierten Vektorraums können wir zunächst die Tangentialräume vergleichen. Zu jedem  $x \in D_\epsilon$  existieren  $C^\infty$ -Abbildungen

$$\tilde{H}_x : U_{\epsilon_0} \times T_x D_\epsilon \rightarrow E_\epsilon^s(x)$$

linear in der zweiten Komponente mit

$$H_x(y)u := u + \tilde{H}_x(y, u) = u + \tilde{H}_x(y)u \in T_y D_\epsilon$$

für  $y \in U_{\epsilon_0}(x) \cap D_\epsilon$ . Das Bild dieser Abbildung ist mit anderen Worten durch  $R(id + \tilde{H}_x(y)) = RH_x(y) = T_y D_\epsilon$  gegeben. Es gilt  $|\tilde{H}_x(y)|_\alpha \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow x$ .

**Definition.** Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit in  $X^\alpha$ . Die Ableitung einer Abbildung  $g : M \rightarrow X^\alpha$  heißt Hölderstetig mit Hölderexponent  $\beta$  (oder  $Dg \in C^\beta$ ), wenn

$$\limsup_{y \rightarrow x, y \in M} \frac{|Dg(x) - Dg(y) \circ H_x(y)|_\alpha}{|x - y|^\beta} =: R_x(g) \leq R(g) \infty$$

für alle  $x \in M$  gilt.

Dabei ist die Norm im Zähler gegeben durch  $|\cdot|_{L(T_x M, X^\alpha)}$  mit der durch  $T_x M \hookrightarrow X^\alpha$  auf  $T_x M$  induzierten Norm. Analog definiert man die Hölderstetigkeit der höheren Ableitungen von  $\sigma$ . Falls  $M$  eingeschränkt auf eine offene Menge flach ist, dann stimmt diese Definition mit der üblichen Definition im  $\mathbb{R}^n$  überein, da dort  $\tilde{H}_x(\cdot) \equiv 0$  ist. Insbesondere gilt dies für unsere Mannigfaltigkeit  $D_\epsilon$  in der Umgebung des stationären Punktes.

**Lemma 2.26** ([23, Lemma 6.1.6]) *Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $U \subset X$  offen. Dann ist  $B_R(C^{k,\beta}(U, Y))$  für  $\beta > 0$  abgeschlossen in  $C^0(U, Y)$ .*

Dabei bezeichnet  $B_R$  die Kugel mit Radius  $R$ . Dieses Lemma übertragen wir nun auf unsere Definition von Hölderstetigkeit.

**Lemma 2.27**  *$B_R(C^{k,\beta}(D_\epsilon))$  ist für  $\beta > 0$  abgeschlossen in  $C^0(D_\epsilon)$ .*

**Beweis.** Wir beschränken uns auf den Fall  $k = 1$ . Der Beweis für  $k > 1$  verläuft analog. Im folgenden verwenden wir die Identitäten

$$\hat{\pi}^{cu} \circ \hat{\pi}^{cu} = \hat{\pi}^{cu}$$

und

$$\begin{aligned} D\hat{\pi}^{cu}(y) D\hat{\pi}^{cu}(x) &= D\hat{\pi}^{cu}(y) \left( id_{T_x D_\epsilon} - H_x(y) + H_x(y) \right) D\hat{\pi}^{cu}(x) \\ &= D\hat{\pi}^{cu}(y) \left( -\tilde{H}_x(y) + H_x(y) \right) D\hat{\pi}^{cu}(x) \\ &= \left( D\hat{\pi}^{cu}(x) - D\hat{\pi}^{cu}(y) \right) \tilde{H}_x(y) D\hat{\pi}^{cu}(x) + D\hat{\pi}^{cu}(y) H_x(y) D\hat{\pi}^{cu}(x) \\ &= \left( D\hat{\pi}^{cu}(x) - D\hat{\pi}^{cu}(y) \right) \tilde{H}_x(y) D\hat{\pi}^{cu}(x) + H_x(y) D\hat{\pi}^{cu}(x), \end{aligned}$$

da  $R\tilde{H}_x \subset E_x^s = \text{Ke } D\hat{\pi}^{cu}(x)$  und  $D\hat{\pi}^{cu}(y)|_{T_y D_\epsilon} = id$  ist. Es konvergiere  $\sigma_n \rightarrow \sigma$  in  $C^0$  mit  $\sigma_n \in B_R := B_R(C^{1,\beta}(D_\epsilon))$  für alle  $n$ . Wir betrachten dann  $\sigma_n \circ \hat{\pi}^{cu} : U \rightarrow X^\alpha$ ,

wobei  $U = E_\epsilon^s \subset X^\alpha$  offen ist. Dann existiert wegen Lemma 2.26 ein  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow X^\alpha$  mit  $\tilde{\sigma} \in B_R(C^{1,\beta}(U))$  und  $D^i(\sigma_n \circ \hat{\pi}^{cu}) \rightarrow D^i\tilde{\sigma}$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $i = 0, 1$ . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} & |D\sigma_n \circ D\hat{\pi}^{cu}(x) - D\sigma_n \circ D\hat{\pi}^{cu}(y)|_\alpha \\ & \leq \left| \left( D\sigma_n(\hat{\pi}^{cu}(x)) - D\sigma_n(\hat{\pi}^{cu}(y)) D\hat{\pi}^{cu}(\hat{\pi}^{cu}(y)) \right) D\hat{\pi}^{cu}(x) \right|_\alpha + \\ & \quad \left| D\sigma_n(\hat{\pi}^{cu}(y)) D\hat{\pi}^{cu}(\hat{\pi}^{cu}(y)) \right|_\alpha \left| D\hat{\pi}^{cu}(x) - D\hat{\pi}^{cu}(y) \right|_\alpha \\ & \leq \left| D\sigma_n(\hat{\pi}^{cu}(x)) - D\sigma_n(\hat{\pi}^{cu}(y)) H_{\hat{\pi}^{cu}(x)}(\hat{\pi}^{cu}(y)) \right|_\alpha \left| D\hat{\pi}^{cu}(x) \right|_\alpha + \\ & \quad \left| D\sigma_n(\hat{\pi}^{cu}(y)) D\hat{\pi}^{cu}(\hat{\pi}^{cu}(y)) \right|_\alpha \cdot \left( \left| \tilde{H}_{\hat{\pi}^{cu}(x)}(\hat{\pi}^{cu}(y)) \right|_\alpha \left| D\hat{\pi}^{cu}(x) \right|_\alpha + 1 \right) \cdot \\ & \quad \left| D\hat{\pi}^{cu}(x) - D\hat{\pi}^{cu}(y) \right|_\alpha. \end{aligned}$$

Daher ist  $\sigma_n \circ \hat{\pi}^{cu} \in C^{1,\beta}(U)$  für alle  $n$ . Wir setzen nun  $\sigma = \tilde{\sigma}|_{D_\epsilon}$ . Dann folgt  $D^i\sigma_n \rightarrow D^i\sigma$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $i = 0, 1$ . Deshalb ist auch  $\sigma \in B_R(C^{1,\beta}(D_\epsilon))$  und das Lemma ist bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 2.28** Um die Hölderregularität von  $D\sigma_*$  zu zeigen, ist es offensichtlich ausreichend,

$$\Phi_T^\# \left( B_R(C^{1,\beta}(D_\epsilon)) \cap \Sigma_\epsilon \right) \subset \left( B_R(C^{1,\beta}(D_\epsilon)) \cap \Sigma_\epsilon \right)$$

für ein geeignetes  $R > 0$  nachzuweisen. Der Fixpunkt  $\sigma_*$  ist dann nämlich in  $B_R(C^{1,\beta}(D_\epsilon))$  enthalten, da  $B_R(C^{1,\beta}(D_\epsilon)) \cap \Sigma_\epsilon$  nach Lemma 2.27 abgeschlossen in  $\Sigma_\epsilon$  ist.

**Bemerkung 2.29** Für Abbildungen  $f, g \in C^{1,\beta}(D_\epsilon)$  mit  $g : D_\epsilon \rightarrow D_\epsilon$  gilt

$$R_x(D(f \circ g)) \leq R_{g(x)}(Df) L_x(g)^{1+\beta} + L_{g(x)}(f) R_x(Dg) + L_{g(x)}(f) L_x(g)^{1+\beta} R_{gx}(H).$$

**Beweis.** Zunächst gilt für beliebige Abbildungen  $\tilde{f} \in C^\beta(D_\epsilon, X^\alpha)$  und  $\tilde{g} \in C^{0,1}(D_\epsilon, X^\alpha)$  die Ungleichung

$$\frac{|(\tilde{f} \circ \tilde{g})(x) - (\tilde{f} \circ \tilde{g})(y)|_\alpha}{|x - y|_\alpha^\beta} \leq \frac{|\tilde{f}(\tilde{g}(x)) - \tilde{f}(\tilde{g}(y))|_\alpha}{|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)|_\alpha^\beta} \left( \frac{|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)|_\alpha}{|x - y|_\alpha} \right)^\beta$$

und es folgt

$$(2.38) \quad R(\tilde{f} \circ \tilde{g}) \leq R(\tilde{f}) L^\beta(\tilde{g}).$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung erhalten wir dann

$$\begin{aligned} (2.39) \quad & |D(f \circ g)(x) - D(f \circ g)(y) H_x(y)|_\alpha \leq \\ & \leq \left| \left( Df(gx) - Df(gy) H_{gx}(gy) \right) Dg(x) \right|_\alpha + \\ & \quad \left| Df(gy) \left( H_{gx}(gy) Dg(x) - Dg(y) H_x(y) \right) \right|_\alpha \\ & \leq |Df(gx) - Df(gy) H_{gx}(gy)|_\alpha |Dg(x)|_\alpha + \\ & \quad |Df(gy)|_\alpha \cdot \left( |H_{gx}(gy) - id_{T_{gx}D_\epsilon}|_\alpha |Dg(x)|_\alpha + \right. \\ & \quad \left. |Dg(x) - Dg(y) H_x(y)|_\alpha \right). \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit  $|x - y|_\alpha^{-\beta}$  und dem Grenzübergang  $y \rightarrow x$  folgt daher

$$R_x(D(f \circ g)) \leq R_{g(x)}(Df) L_x(g)^{1+\beta} + L_{g(x)}(f) \left( R_{g(x)}(H) L_x(g)^{1+\beta} + R_x(g) \right)$$

und dies beweist die Bemerkung.  $\square$

**Lemma 2.30** *Es existiert ein  $R_0 > 0$ , so daß*

$$\Phi_T^\# \left( B_{R_0}(C^{1,\beta}(D_\epsilon)) \cap \Sigma_\epsilon \right) \subset \left( B_{R_0}(C^{1,\beta}(D_\epsilon)) \cap \Sigma_\epsilon \right)$$

*gilt. Dabei wird  $R_0$  im allgemeinen von  $\epsilon$  abhängen.*

**Beweis.** Es sei  $\sigma \in B_R(C^{1,\beta}(D_\epsilon))$ . Dann ist  $\Phi_T^\#(\sigma) \in C^1(D_\epsilon)$  und die Ableitung erfüllt  $|D(\Phi_T^\#(\sigma))|_\alpha \leq 1$ . Daher müssen wir nur noch  $D(\Phi_T^\#(\sigma)) \in B_R(C^\beta(D_\epsilon))$  zeigen. Es gilt

$$D(\Phi_T^\#(\sigma)) = D\hat{\pi}^s \circ D\Phi_T \circ (id + D\sigma) \circ Dg_\sigma.$$

Die Zeit  $T$ -Abbildung  $\Phi_T$  ist in  $C^{1,\beta}(U, X^\alpha)$ . Allerdings wird die Hölderkonstante  $R(D\Phi_T) \rightarrow \infty$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  im allgemeinen unbeschränkt anwachsen, da wir cutoff-Funktionen verwendet haben.

Zunächst zeigen wir, daß die Ableitungen der Rechtsinversen  $g_\sigma$  Hölderstetig sind und berechnen deren Höldernorm. Zuvor bemerken wir noch, daß wir wegen der Lemmata 2.10, 2.16 und 2.19 die Minimumnorm der Ableitung  $D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))$  stets nach unten abschätzen können. Es gilt

$$(2.40) \quad \begin{aligned} m_0(x) &:= m \left( D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(x) \right) \\ &\geq \begin{cases} Ke^{-\alpha^s T} + o_\epsilon + C(T) \delta & \text{für } x \in D_\epsilon^f \\ e^{-\alpha^s T} + C(T, \kappa_0) \epsilon + C(T) \delta & \text{für } x \in D_\epsilon^\pm \\ e^{-\alpha^s(T-a(x))} e^{-\gamma_1 a(x)} + o_\epsilon & \text{für } x \in D_\epsilon^l. \end{cases} \end{aligned}$$

Nun verschaffen wir uns eine implizite Darstellung von  $Dg_\sigma$ . Es gilt

$$\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma = id_{D_\epsilon}$$

und daher

$$D\hat{\pi}^{cu} \circ D\Phi_T \circ (id + D\sigma) \circ Dg_\sigma = id_{T_x D_\epsilon}.$$

Wie in Gleichung (2.39) folgt dann

$$\begin{aligned} &\left| id_{T_x D_\epsilon} - id_{T_y D_\epsilon} H_x(y) \right|_\alpha = \\ &= \left| D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma x) Dg_\sigma(x) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma y) Dg_\sigma(y) H_x(y) \right|_\alpha \\
& \geq - \left| \left( D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma x) - D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma y) H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) \right) \cdot \right. \\
& \quad \left. Dg_\sigma(x) \right|_\alpha + \left| D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma y) \left( H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) Dg_\sigma(x) - Dg_\sigma(y) H_x(y) \right) \right|_\alpha \\
& \geq m_0(g_\sigma y) \left| H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) Dg_\sigma(x) - Dg_\sigma(y) H_x(y) \right|_\alpha - \\
& \quad \left| D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma x) - D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma y) H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) \right|_\alpha \left| Dg_\sigma(x) \right|_\alpha \\
& \geq m_0(g_\sigma y) \left| Dg_\sigma(x) - Dg_\sigma(y) H_x(y) \right|_\alpha - m_0(g_\sigma y) \left| H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) - id_{T_{g_\sigma x} D_\epsilon} \right|_\alpha \left| Dg_\sigma(x) \right|_\alpha - \\
& \quad \left| D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma x) - D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma y) H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) \right|_\alpha \left| Dg_\sigma(x) \right|_\alpha.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
& \left| Dg_\sigma(x) - Dg_\sigma(y) H_x(y) \right|_\alpha \\
& \leq m_0(g_\sigma y)^{-1} \left( \left| id_{T_x D_\epsilon} - H_x(y) \right|_\alpha + \left| D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma x) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma))(g_\sigma y) H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) \right|_\alpha \left| Dg_\sigma(x) \right|_\alpha \right) + \\
& \quad \left| H_{g_\sigma x}(g_\sigma y) - id_{T_{g_\sigma x} D_\epsilon} \right|_\alpha \left| Dg_\sigma(x) \right|_\alpha.
\end{aligned}$$

Aufgrund von  $\hat{\pi}^s(x + \sigma(x)) = \sigma(x)$  folgt

$$\begin{aligned}
& \left| D\sigma(x) - D\sigma(y) H_x(y) \right|_\alpha \\
& \leq \left| D\hat{\pi}^s(x + \sigma(x)) \left( D\sigma(x) - D\sigma(y) H_x(y) \right) \right|_\alpha + \\
& \quad \left| \left( D\hat{\pi}^s(x + \sigma(x)) - D\hat{\pi}^s(y + \sigma(y)) \right) \right|_\alpha \left| D\sigma(y) H_x(y) \right|_\alpha \\
& \leq \left| D\hat{\pi}^s(x + \sigma(x)) \right|_\alpha \left| D\sigma(x + \sigma(x)) - D\sigma(y + \sigma(y)) H_x(y) \right|_\alpha + \\
& \quad \left| D\hat{\pi}^s(x + \sigma(x)) - D\hat{\pi}^s(y + \sigma(y)) \right|_\alpha \left| D\sigma(y) H_x(y) \right|_\alpha.
\end{aligned}$$

Dann ist  $Dg_\sigma$  Hölderstetig und wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
R_x(Dg_\sigma) & \leq L_x(g_\sigma)^{1+\beta} R(H) + \\
& \quad m_0(g_\sigma x)^{-1} \left( R(H) + L_x(g_\sigma)^\beta \left( R(D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)) L(id + \sigma)^{1+\beta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. L(D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)) (R(H) + R(D\hat{\pi}^s)) + |D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)(x_0) D\hat{\pi}^s(x_0)|_\alpha R_{g_\sigma x}(D\sigma) \right) \right)
\end{aligned}$$

für die Hölderkonstante mit  $x_0 = g_\sigma(x) + \sigma(g_\sigma(x))$ . Wie in Gleichung (2.36) folgt dann

$$\left| D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)(x_0) D\hat{\pi}^s(x_0) \right|_\alpha \leq o_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi).$$

Damit gelangen wir schließlich zu der Ungleichung

$$\begin{aligned}
(2.41) \quad R_x(Dg_\sigma) & \leq L_x(g_\sigma)^{1+\beta} R(H) + \\
& \quad m_0(g_\sigma x)^{-1} \left( R(H) + L_x(g_\sigma)^\beta \left( R(D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)) L(id + \sigma)^{1+\beta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. L(D(\hat{\pi}^{cu} \Phi_T)) (R(H) + R(D\hat{\pi}^s)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (o_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi)) R_{g_\sigma x}(D\sigma) \right) \right).
\end{aligned}$$

Jetzt können wir die Hölderstetigkeit von  $\Phi_T^\#(\sigma)$  nachweisen. Dazu müssen wir die Differenz

$$|D(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma)(x) - D(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma)(y)|_\alpha$$

abschätzen. Dies geht genau so vor sich wie bei der oben stehenden Abschätzung der Hölderkonstanten von  $D(\hat{\pi}^{cu} \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma)$ . Deshalb geben wir nur das Ergebnis an:

$$\begin{aligned} & R_x(D(\hat{\pi}^s \circ \Phi_T \circ (id + \sigma) \circ g_\sigma)) \\ & \leq R(D(\hat{\pi}^s \Phi_T) D\hat{\pi}^s) L(id + \sigma)^{1+\beta} L(g_\sigma) + \\ & \quad |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(x_0) D\hat{\pi}^s(x_0)|_\alpha R_{g_\sigma x}(D\sigma) L_x(g_\sigma)^{1+\beta} + \\ & \quad R_x(Dg_\sigma) |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)|_\alpha (C_0 L(\sigma) + 1) + |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)|_\alpha L(\sigma) L_x(g_\sigma)^{1+\beta} R(H). \end{aligned}$$

Dabei ist wieder  $x_0 = g_\sigma(x) + \sigma(g_\sigma(x))$ . In diese Ungleichung setzen wir unsere Abschätzung (2.41) für  $R(g_\sigma)$  ein. Da es uns nur auf eine Schranke für  $R(D\sigma)$  ankommt, bezeichnen wir mit  $M_\epsilon$  eine Konstante, die die Hölderkonstanten von  $D(\hat{\pi}^i \Phi_T)$  und  $H$  für  $i = s, cu$  sowie alle Lipschitzkonstanten enthält.  $M_\epsilon$  ist aber unabhängig von  $R(D\sigma)$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & R_x(D\Phi_T^\#(\sigma)) \\ & \leq M_\epsilon + |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(x_0) D\hat{\pi}^s(x_0)|_\alpha R_{g_\sigma x}(D\sigma) L_x(g_\sigma)^{1+\beta} + \\ & \quad R_x(Dg_\sigma) |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)|_\alpha (C_0 L(\sigma) + 1) \\ & \leq M_\epsilon + R_{g_\sigma x}(D\sigma) \left( |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(x_0) D\hat{\pi}^s(x_0)|_\alpha L_x(g_\sigma)^{1+\beta} + \right. \\ & \quad \left. \left( \circ_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi) \right) m_0(g_\sigma x)^{-1} L_x(g_\sigma)^\beta \right). \end{aligned}$$

Wir beachten, daß die Abschätzungen von  $L(g_\sigma)$  und  $m_0(x)$  gleichmäßig in  $\epsilon$  sind, und bekommen deshalb

$$(2.42) \quad \begin{aligned} & R_x(D\Phi_T^\#(\sigma)) \\ & \leq M_\epsilon + R_{g_\sigma x}(D\sigma) \left( \circ_\epsilon + C(T) \delta + \kappa_1 C(T, \kappa_0) \tilde{K}(\chi) + \right. \\ & \quad \left. \left| D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x + \sigma(g_\sigma x)) D\hat{\pi}^s(g_\sigma x + \sigma(g_\sigma x)) \right|_\alpha L_x(g_\sigma)^{1+\beta} \right). \end{aligned}$$

Nach Definition gilt nun

$$L_x(g_\sigma) \leq m_0(g_\sigma x).$$



Aus den Lemmata 2.11, 2.16 und 2.19 sowie aus Gleichung (2.40) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
& |D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x + \sigma(g_\sigma x)) D\hat{\pi}^s(g_\sigma x + \sigma(g_\sigma x))|_\alpha L_x(g_\sigma)^{1+\beta} \leq \\
& \leq \begin{cases} \left( K e^{-\alpha^{ss} T} + o_\epsilon + C(T) \delta \right) \cdot \left( K e^{\alpha^s T} + o_\epsilon + C(T) \delta \right)^{1+\beta} & \text{für } x \in D_\epsilon^f \\ \left( K e^{-\alpha^{ss} T} + o_\epsilon + C(T) \delta \right) \cdot \left( e^{\alpha^s T} + C(T, \kappa_0) \epsilon + C(T) \delta \right)^{1+\beta} & \text{für } x \in D_\epsilon^\pm \\ \left( K e^{-\alpha^{ss} T} e^{-\gamma_1 a(g_\sigma x)} + \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi) + o_\epsilon \right) \cdot & \text{für } x \in D_\epsilon^l \\ \left( e^{\alpha^s(T-a(g_\sigma x))} e^{\gamma_1 a(g_\sigma x)} + o_\epsilon \right)^{1+\beta} & \end{cases} \\
& \leq \begin{cases} K e^{-(\alpha^{ss} - (1+\beta)\alpha^s)T} + o_\epsilon + C(T) \delta & \text{für } x \in D_\epsilon^f \\ K e^{-(\alpha^{ss} - (1+\beta)\alpha^s)T} + o_\epsilon + C(T) \delta & \text{für } x \in D_\epsilon^\pm \\ K e^{-(\alpha^{ss} - (1+\beta)\alpha^s)T} e^{-(\gamma_1 + (1+\beta)\alpha^s - (1+\beta)\gamma_1)a(g_\sigma x)} + & \text{für } x \in D_\epsilon^l \\ \kappa_1 C(\kappa_0) C(T) \tilde{K}(\chi) e^{\gamma_1(1+\beta)T} + o_\epsilon. & \end{cases}
\end{aligned}$$

gilt. Nach Voraussetzung ist  $\alpha^{ss} > (1 + \beta)\alpha^s$ . Deshalb existiert ein  $\eta < 1$  mit

$$\left| D(\hat{\pi}^s \Phi_T)(g_\sigma x + \sigma(g_\sigma x)) D\hat{\pi}^s(g_\sigma x + \sigma(g_\sigma x)) \right|_\alpha L_x(g_\sigma)^{1+\beta} < \eta.$$

Aus Gleichung (2.42) folgt schließlich

$$R_x(D\Phi_T^\#(\sigma)) \leq M_\epsilon + \eta R_{g_\sigma x}(D\sigma).$$

Es sei nun  $R(D\sigma) \leq R_0$ . Dann müssen wir zeigen, daß auch  $R(D\Phi_T^\#(\sigma)) \leq R_0$  ist. Für  $R_0 \geq (1 - \eta)^{-1}M_\epsilon$  ist dies aber erfüllt. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Damit ist Satz 1 für die Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  bewiesen.

Um nun die Existenz der eigentlichen Zentrumsmanigfaltigkeit  $W_{hom}^c$  zu zeigen, können wir in endlich-dimensionalen Räumen einfach die Zeit umkehren und die Graphentransformation wiederholen. Wir erhalten dann eine Fläche  $W_{hom}^{cs}$ , die diejenigen Punkte enthält, deren Vorwärtsiterierte alle in  $E_\epsilon^s$  liegen. Der Durchschnitt  $W_{hom}^{cu} \cap W_{hom}^{cs}$  ist dann die gesuchte Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^c$ . In unendlich-dimensionalen Räumen haben wir im allgemeinen nur einen Halbfluß und eine Zeitumkehr verbietet sich. Es ist jedoch möglich, das ‘‘Vektorfeld’’ auf die bereits konstruierte, endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  einzuschränken und dann auf  $W_{hom}^{cu}$  den Rückwärtsfluß zu bilden. Dies realisieren wir wie folgt. Zunächst können wir wegen Bemerkung 2.25 die Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  als Graph  $\hat{\sigma}_*$  über der  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $\hat{D}_\epsilon$  in das  $C^\infty$ -Bündel  $\hat{E}_\epsilon^s$  schreiben. Anschließend ziehen wir den Halbfluß eingeschränkt auf  $W_{hom}^{cu}$  auf  $\hat{D}_\epsilon$  zurück. Dazu zerlegen wir jede Lösung  $x(t) \in W_{hom}^{cu}$  in die zwei Komponenten

$$\begin{aligned}
u(t) & := \hat{\pi}^{cu}(x(t)) \in \hat{D}_\epsilon \\
\hat{\sigma}_*(u(t)) & \in \hat{E}_\epsilon^s(u(t)).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Invarianz von  $W_{hom}^{cu}$  folgt  $u(t) + \hat{\sigma}_*(u(t)) = x(t)$ . Außerdem ist  $u(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$(2.43) \quad \dot{u} = D\hat{\pi}^{cu}(u + \hat{\sigma}(u)) \left( -A(u + \hat{\sigma}(u)) + f(u + \hat{\sigma}(u)) \right).$$

Umgekehrt löse  $\hat{u}(t)$  die Differentialgleichung (2.43) auf  $\hat{D}_\epsilon$ . Dann ist  $\hat{x}(t) = \hat{u}(t) + \hat{\sigma}(\hat{u}(t))$  eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung mit  $\hat{x}(0) = \hat{u}(0) + \hat{\sigma}(\hat{u}(0)) \in W_{hom}^{cu}$ . Wenn wir nämlich mit  $x(t)$  die Lösung auf  $W_{hom}^{cu}$  mit  $x(0) = \hat{x}(0)$  bezeichnen, so ist  $\hat{\pi}^{cu}(x(t))$  eine Lösung von (2.43) mit gleichem Anfangswert wie  $\hat{x}(t)$ . Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von (2.43) stimmen die beiden Kurven überein. Dabei beachten wir, daß nach dem folgenden Lemma 2.31 das Vektorfeld auf  $\hat{D}_\epsilon$  Lipschitzstetig ist.

Durch die Differentialgleichung (2.43) wird daher der Fluß auf  $W_{hom}^{cu}$  vollständig charakterisiert. Die Regularität des Vektorfeldes ist dabei durch die Regularität von  $\sigma_*$  gegeben.

**Lemma 2.31** *Es sei  $f \in C^{k,\beta}(X, X^\alpha)$  mit  $k, \beta > 0$ . Dann ist das auf  $\hat{D}_\epsilon$  induzierte Vektorfeld in  $C^{k,\tilde{\beta}}$  für jedes  $\tilde{\beta} < \beta$ .*

**Beweis.** Wieder beschränken wir uns o.B.d.A. auf den Fall  $k = 1$ . Wir müssen zeigen, daß die Ableitung von

$$D\hat{\pi}^{cu}(u + \hat{\sigma}(u)) \left( -A(u + \hat{\sigma}(u)) + f(u + \hat{\sigma}(u)) \right)$$

Hölderstetig ist. Direkt an diesem ‘‘Vektorfeld’’ ist das nicht leicht zu sehen. Deshalb bemerken wir zunächst, daß der Halbfluß eingeschränkt auf Graph  $\hat{\sigma}_*$  invertierbar ist. Denn dies ist natürlich äquivalent zur Existenz des Rechtsinversen  $g_{\hat{\sigma}_*}$  und daher richtig. Daher ist es ausreichend, die Hölderstetigkeit der Ableitung

$$D_x \left( D\hat{\pi}^{cu}(\Phi(T, x)) \frac{d}{dt} \Phi(t, x) \Big|_{t=T} \right)$$

an der Stelle  $x = u + \hat{\sigma}_*(u)$  nachzuweisen. Denn durch Verkettung mit  $g_{\hat{\sigma}_*}$  erhält man das Vektorfeld an der Stelle  $x$ . Wir zeigen zuerst

$$(2.44) \quad \dot{D}_x \Phi(t, x) \Big|_{t=T} \in C^{\tilde{\beta}}(X^\alpha, X)$$

für jedes  $\tilde{\beta} < \beta$ . Aus [23, Lemma 3.5.1] folgt für  $t > 0$

$$(2.45) \quad \frac{d}{dt} \Phi_t(x) = -A e^{-At} + e^{-At} f(\Phi_t x) + \int_0^t A e^{-A(t-s)} \left( f(\Phi_t x) - f(\Phi_s x) \right) ds.$$

Wir behaupten nun, daß

$$\begin{aligned} D\dot{\Phi}_t(x) &= -A e^{-At} + e^{-At} Df(\Phi_t x) D\Phi_t(x) + \\ &\quad \int_0^t A e^{-A(t-s)} \left( Df(\Phi_t x) D\Phi_t(x) - Df(\Phi_s x) D\Phi_s(x) \right) ds \end{aligned}$$

gilt und  $D\dot{\Phi}_T(\cdot) : X^\alpha \rightarrow L(X^\alpha, X) \in C^{\tilde{\beta}}$  ist. Dazu betrachten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left| f(\Phi_t(x+h)) - f(\Phi_t x) - Df(\Phi_t x) D\Phi_t(x) h + \right. \\
& \quad \left. Df(\Phi_s x) D\Phi_s(x) h + f(\Phi_s x) - f(\Phi_s(x+h)) \right| \\
& \leq \int_0^1 \left| Df(\Phi_t(x+\tau h)) D\Phi_t(x+\tau h) - Df(\Phi_s(x+\tau h)) D\Phi_s(x+\tau h) + \right. \\
& \quad \left. Df(\Phi_s x) D\Phi_s(x) - Df(\Phi_t x) D\Phi_t(x) \right| d\tau |h|_\alpha \\
& \leq |t-s|^{\eta \frac{1}{n}} |h|_\alpha^{1+\beta \frac{n-1}{n}}.
\end{aligned}$$

Es gilt nämlich mit  $F(t, h) := Df(\Phi_t(x+\tau h)) D\Phi_t(x+\tau h)$

$$\begin{aligned}
|F(t, h) - F(s, h) + F(s, 0) - F(t, 0)| & \leq C |t-s|^\eta \\
|F(t, h) - F(t, 0) + F(s, 0) - F(s, h)| & \leq C |h|_\alpha^\beta,
\end{aligned}$$

denn  $f \in C^{1,\beta}$ ,  $\Phi_t \in C^{1,\beta}$  und die Lösungen sind  $C^\eta$  für ein  $\eta > 0$ , vergleiche [23, Lemma 3.4.4]. Daher können wir den zu dem Integral in (2.45) gehörenden Differenzenquotienten abschätzen und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left| A e^{-A(t-s)} \right| \left| f(\Phi_t(x+h)) - f(\Phi_t x) - Df(\Phi_t x) D\Phi_t(x) h + \right. \\
& \quad \left. Df(\Phi_s x) D\Phi_s(x) h + f(\Phi_s x) - f(\Phi_s(x+h)) \right| ds \\
& \leq \int_0^t (t-s)^{-1} e^{\alpha(t-s)} \int_0^1 \left| Df(\Phi_t(x+\tau h)) D\Phi_t(x+\tau h) - \right. \\
& \quad \left. Df(\Phi_s(x+\tau h)) D\Phi_s(x+\tau h) + Df(\Phi_s x) D\Phi_s(x) - Df(\Phi_t x) D\Phi_t(x) \right| d\tau |h|_\alpha ds \\
& \leq \int_0^t C (t-s)^{\eta \frac{1}{n}-1} e^{\alpha(t-s)} ds |h|_\alpha^{1+\beta \frac{n-1}{n}} \\
& \leq C |h|_\alpha^{1+\beta \frac{n-1}{n}},
\end{aligned}$$

was die Behauptung (2.44) beweist. Wir können die Abbildungen  $D\hat{\pi}^{cu}(x) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$  für festes  $x$  zu Abbildungen von  $X$  nach  $X$  erweitern. Denn nach Lemma 1.2(v) können wir die Projektionen der exponentiellen Dichotomien auf  $X$  fortsetzen. Weiterhin sind die approximierenden Projektionen aus Bemerkung 2.3 auf  $X$  erweiterbar, wie leicht aus dem Beweis folgt. Und nach Definition von  $\hat{\pi}^{cu}(\cdot)$  kann auch diese Abbildung schließlich auf  $X$  fortgesetzt werden. Daher ist die Abbildung  $D\hat{\pi}^{cu}(\Phi_T(x)) D\dot{\Phi}_T(x) : X^\alpha \rightarrow X$  wohldefiniert und Hölderstetig mit Exponent  $\tilde{\beta} < \beta$ . Nun ist das Bild dieser Abbildung im Tangentialraum  $T_{\Phi_T(x)} \hat{D}_\epsilon$  enthalten für jedes  $x \in D_\epsilon$ . Außerdem ist  $\hat{D}_\epsilon \subset X$  mit der induzierten Topologie eine zu  $\hat{D}_\epsilon \subset X^\alpha$  diffeomorphe Mannigfaltigkeit, denn die Identität ist eine injektive Immersion und  $D_\epsilon$  ist kompakt. Wir können also [3, Satz 5.7] anwenden. Deshalb ist  $D\hat{\pi}^{cu}(\Phi_T(x)) D\dot{\Phi}_T(x)$  verkettet mit der Inversen der Identität tatsächlich Hölderstetig auf  $\hat{D}_\epsilon$  als Teilmenge von  $X^\alpha$ .  $\square$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, für  $f : X^\alpha \rightarrow X$  mehr Regularität zu verlangen. Zum Beispiel zeigt man mit Hilfe von [23, Lemma 3.5.1] für  $f \in C^{2,\beta}$  leicht, daß  $D\dot{\Phi}_T(\cdot) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha \in C^{1,\beta}$  ist und deshalb besitzt natürlich auch die Einschränkung auf  $\hat{D}_\epsilon$  diese Regularität.

Um die Existenz von  $W_{hom}^c$  zu beweisen, können wir daher das auf  $\hat{D}_\epsilon$  eingeschränkte Vektorfeld mit  $(-1)$  multiplizieren und die Differentialgleichung (2.43) in negativer Zeitrichtung betrachten. Dann wenden wir Satz 1 auf diesen Fluß an. Man sieht leicht, daß die Voraussetzungen (H1) bis (H3) erfüllt sind. Darüberhinaus gilt der Satz ebenso auf endlichdimensionalen, eingebetteten Mannigfaltigkeiten. Deshalb existiert ein lokal invarianter Graph  $\sigma_*^c$  für (2.43). Der mit  $\sigma_*^{cu}$  verkettete Graph  $(id_{cu} + \sigma_*^{cu}) \circ (id_c + \sigma_*^c)$  repräsentiert dann die lokal invariante Fläche  $W_{hom}^c$  in  $X^\alpha$ .

Damit ist Satz 1 für nicht oszillierende homokline Orbits bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, daß Satz 1 auch für oszillierende homokline Orbits, d.h. für komplexe Eigenwerte  $\lambda_+$  oder  $\lambda_-$ , gilt. Dazu muß die obenstehende Beweismethode nur in den Bereichen  $D_\epsilon^\pm$  und  $D_\epsilon^l$  modifiziert werden. In  $D_\epsilon^f$  kann man genauso wie oben vorgehen.

**Bemerkung 2.32** Für die logarithmische Spirale gegeben durch die Lösung  $y(t) = e^{-(\lambda+i\omega)t}$  von  $\dot{x} = (\lambda + i\omega)x$  mit  $x \in \mathbb{R}^2$  für  $\omega, \lambda > 0$  und  $t \geq 0$  gilt:

(i) Es ist

$$y(r) = r \cdot \left( \sin(\varphi(r)), \cos(\varphi(r)) \right) =: r e(r)$$

mit  $\varphi(r) = -\frac{\omega}{\lambda} \ln r$ . Ferner gilt  $|\frac{d}{dr} y(r)| \leq 1 + \frac{\omega}{\lambda}$ .

(ii) Die logarithmische Spirale ist skalierbar, d.h. die Kurve geht nach Multiplikation mit  $a := e^{-\frac{2\pi\lambda}{\omega}} < 1$  in sich über.

(iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} L : [\epsilon, 1] \times \left[-\frac{1-a}{4}\epsilon, \frac{1-a}{4}\epsilon\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, u) &\longmapsto (r+u)e(r) \end{aligned}$$

parametrisiert eine  $\frac{a\epsilon}{4}$ -Umgebung des durch  $r \in [\epsilon, 1]$  gegebenen Teils der Spirale im  $\mathbb{R}^2$  gleichmäßig in  $1 \geq \epsilon > 0$ . Es gilt  $|DL| \leq 2 + \frac{\omega}{\lambda}$ .

(iv) Die Abbildung  $L$  ist auf ihrem Bild im  $L$  invertierbar und für  $x \in \text{im } L$  gilt  $|D(L^{-1})| \leq C(\lambda, \omega)$  gleichmäßig in  $\epsilon$ .

(v) Für alle  $(r_i, u_i) \in [\epsilon, 1] \times \left[-\frac{1-a}{4}\epsilon, \frac{1-a}{4}\epsilon\right]$  mit  $i = 0, 1$  gilt

$$|L(r_0, u_0) - L(r_1, u_1)| \geq m_0 |(r_0, u_0) - (r_1, u_1)|$$

mit einer von  $\epsilon$  unabhängigen Konstanten  $m_0 > 0$ .

**Beweis.** Die Behauptung (i) ist klar. Für den zweiten Teil betrachte  $r_n = a^n r_0$ . Dann ist  $\varphi(r_n) = 2\pi n + \varphi(r_0)$  und insbesondere  $e(r_n) = e(r_0)$ . Deshalb folgt  $y(r_n) = a^n y(r_0)$  für alle  $n$  und daher Teil (ii). Behauptung (iii) folgt leicht aus (ii), denn der Abstand zwischen  $y(r)$  und  $y(ar)$  ist durch  $(1-a)r$  gegeben. Für  $r = \epsilon$  ist daher der Abstand gleich  $(1-a)\epsilon$ . Andererseits ist  $|u| \leq \frac{1-a}{4}\epsilon$  und deshalb ist  $L$  injektiv. Die gleiche Beschränkung von  $u$  zeigt die gleichmäßige Schranke für  $|DL|$ . Es bleibt (iv) zu zeigen. Dazu invertiert man  $DL$  explizit ( $DL$  ist in  $L(\mathbb{R}^2)$ ) und schätzt die Norm ab. Die Beschränkung von  $u$  liefert dann wieder das Ergebnis. Zuletzt zeigen wir (v). Es sei  $r_1 \geq r_0$ . Zunächst ist

$$L(r_1, u_1) - L(r_0, u_0) = (r_1 + u_1 - r_0 - u_0) e(r_1) + (r_0 + u_0) (e(r_1) - e(r_0)).$$

Wir betrachten erst den Fall  $r_1 - r_0 > \frac{1-a}{2}\epsilon$ . Wegen  $|u_0 - u_1| \leq \frac{1-a}{2}\epsilon$  gilt dann  $r_1 + u_1 - r_0 - u_0 > 0$  und wir folgern

$$|L(r_1, u_1) - L(r_0, u_0)| = |(r_1 + u_1) e(r_1) - (r_0 + u_0) e(r_0)| \geq |r_1 - r_0|.$$

Wegen  $|r_1 - r_0| \geq |u_1 - u_0|$  folgt dann

$$|L(r_1, u_1) - L(r_0, u_0)| \geq \frac{1}{2} (|r_1 - r_0| + |u_1 - u_0|).$$

Zuletzt untersuchen wir den Fall  $r_1 - r_0 \leq \frac{1-a}{2}\epsilon$ . Dann gilt für die Winkeldifferenz

$$|\varphi(r_1) - \varphi(r_0)| \leq C_0 r_0^{-1} |r_1 - r_0|.$$

Daher können wir die Länge des durch  $r \in [r_0, r_1]$  gegebenen Teils der Spirale durch

$$C_0 |r_1 - r_0| r_0^{-1} r_0 = C_0 |r_1 - r_0| \leq C_0 \epsilon$$

abschätzen. Der Durchmesser des Bereichs, in dem wir abschätzen, ist proportional zu  $\epsilon$  für alle  $r_0$  und  $r_1$ . Deshalb können wir dort (iv) anwenden und die Behauptung folgt.  $\square$

Wir wollen Bemerkung 2.32 auf den in den Eigenraum projizierten homoklinen Orbit  $q(t)$  anwenden. Zunächst folgt aus Bemerkung 1.6, daß wir den homoklinen Orbit in der Form  $\tilde{y}(r) = r e(r) + h(r)$  parametrisieren können. Hier gilt für die Störung  $h(r) = O(r^{1+\beta})$  und  $D_r h(r) = O(r^\beta)$  bis in  $r = 0$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{L} : [\epsilon, r_0] \times [-\frac{1-a}{4}\epsilon, \frac{1-a}{4}\epsilon] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, u) &\longmapsto (r + u) e(r) + u h(r). \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.33** Für  $r_0$  groß genug und  $\epsilon$  hinreichend klein besitzt  $\tilde{L}$  selbst die folgenden Eigenschaften.  $\tilde{L}$  ist injektiv und daher invertierbar auf im  $\tilde{L}$  mit  $|D\tilde{L}|, |D(\tilde{L}^{-1})| \leq C_0$  mit einer von  $\epsilon$  unabhängigen Konstanten. Außerdem parametrisiert  $\tilde{L}$  eine  $\frac{\epsilon}{4}$ -Umgebung des homoklinen Astes  $\{q(t) / T_0 \leq t \leq T(\epsilon)\}$ .

**Beweis.** Die Behauptungen folgen aus Bemerkung 2.32 und den Eigenschaften von  $h$ .  $\square$

Wir können daher wieder nichtlineare Projektionen  $\pi$  und  $\hat{\pi}^{cu}$  in der Nähe des stationären Punktes definieren, wobei die Ableitungen dieser Abbildungen gleichmäßig beschränkt in  $\epsilon$  sind. Ferner können wir die Differentialgleichung wie in (2.11) modifizieren, um das Überfließen im Bereich  $D_\epsilon^\pm$  zu garantieren. Wir sehen dann, daß sich Lemma 2.15 auf den komplexen Fall übertragen läßt, denn  $D\hat{\pi}^{cu}$  ist wieder bis auf kleine Terme die (in  $E_0^{cu}$  orthogonale) Projektion auf den Tangentialvektor des homoklinen Orbits. Weiterhin sind alle beteiligten Konstanten wieder apriori bekannt, vergleiche Bemerkung 2.32.

Die Einzelheiten führen wir hier nicht weiter aus. Satz 1 ist damit (bis auf diese Details) auch für komplexe Eigenwerte bewiesen.  $\square$

Wir beweisen zuletzt noch Satz 2.

**Beweis. (Satz 2)**

Wir betrachten statt (2.4) die folgende Gleichung

$$(2.46) \quad \begin{cases} \dot{x} &= -Ax + f(x, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0. \end{cases}$$

Falls  $\lambda_\pm \neq 0$  sind, können wir einfach Satz 1 anwenden und erhalten Satz 2. Tatsächlich ist der Beweis von Satz 1 selbst im Fall von  $\lambda_+$  oder  $\lambda_-$  gleich 0 noch korrekt. Denn da die zweite Gleichung in (2.46) von der ersten entkoppelt, ist das Überfließen auch für  $\mu \neq \mu_0$  gesichert, da wir nur die erste Gleichung (2.46a) modifizieren. Für  $|\mu - \mu_0|$  klein genug erhalten wir wieder eine hyperbolische Struktur und die Graphentransformation kann wie oben durchgeführt werden. Damit ist Satz 2 bewiesen.  $\square$

## 2.4 Diskussion

Das hier dargestellte Ergebnis über die Existenz von Zentrumsmannigfaltigkeiten entlang homokliner Orbits ist nicht das erste Resultat in dieser Richtung. Von Brunovský [4] und Homburg [25] wurden ähnliche Sätze bewiesen. Sie unterscheiden sich dadurch von dem hier bewiesenen Resultat, daß dort nur der Fall einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit behandelt wurde. Darüberhinaus wurde das Gleichgewicht als hyperbolisch vorausgesetzt. In [25] wurde außerdem angenommen, daß die beiden führenden reellen Eigenwerte  $\lambda_\pm$  der Linearisierung im stationären Punkt die Ungleichung  $|\lambda_+| \neq \lambda_-$  erfüllen. Beide Autoren beschränken sich auf endlich-dimensionale Systeme.

Die Annahme (H3) in Satz 1 sieht sehr künstlich aus. Tatsächlich brauchten wir diese Voraussetzung, um in der Nähe des stationären Punktes die  $C^1$ -Norm des abgeschnittenen Vektorfelds über eine Skalierung kontrollieren zu können. Denn insbesondere konnten wir die Abschneidefunktionen  $\chi_\epsilon^s$  und  $\chi_\epsilon^{cu}$  ja durch  $\chi_\epsilon^i(x) := \chi^i(\frac{x}{\epsilon})$  für  $i = s, cu$  definieren.

Das entscheidende Hilfsmittel, daß zu dieser Skalierbarkeit führte, war eine eindimensionale Version von Lemma 1.5. Mit dem allgemeinen Resultat 1.5 sollte die Skalierbarkeit des Abschneidemechanismus auch für höherdimensionale Eigenräume zu erreichen sein.

Falls dagegen der homokline Orbit gegen einen höherdimensionalen, echten Zentrumseigenraum des Gleichgewichts konvergiert, bricht das obenstehende Argument zusammen. Für Nichtlinearitäten in  $C^{2,\rho}$  existiert aber ein Koordinatenwechsel, so daß der echte Zentrumseigenraum lokal invariant ist und einen Ast des homoklinen Orbits enthält. Der entstehende Halbfluß ist immer noch  $C^{1,\rho}$ . Tatsächlich kann mit den gleichen Methoden wie im Beweis von Satz 1 zeigen, daß unter den hier betrachteten Annahmen stets eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit existiert, die einen Punkt des homoklinen Orbits enthält. In dieser Situation kommt man dann vielleicht ohne die Skalierbarkeit aus.

In Abschnitt 2.2 haben wir unsere Ergebnisse über die Existenz von Zentrumsmannigfaltigkeiten nur für homokline Orbits formuliert. Aber man sieht leicht, daß sich Satz 1 auch für heterokline Zyklen beweisen läßt. Dazu müssen nur die Voraussetzungen an die exponentiellen Dichotomien, insbesondere Annahme (H2), entsprechend geändert werden. Ebenso läßt sich der Satz leicht in einem äquivarianten oder reversiblen Kontext formulieren und beweisen, denn unter den entsprechenden Voraussetzungen können die Abschneidefunktionen äquivariant gewählt werden. Dies wird an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt.

## 3. Der analytische Zugang: Lins Methode

### 3.1 Einführung

In diesem Abschnitt werden wir die von Lin [29] entwickelte Methode so modifizieren, daß sie auch auf Zwei-Parameter Probleme angewendet werden kann. Mit Hilfe dieses Zugangs können verzweigende periodische und homokline Lösungen gleichermaßen behandelt werden. Dies ist ein Vorteil gegenüber anderen bekannten Methoden. Anwendungen auf Verzweigungen mit Kodimension eins finden sich in [29] und [41].

Wir wollen im folgenden den Zugang kurz skizzieren. Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(3.1) \quad \dot{x} + Ax = f(x, \mu), \quad (x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

mit einem zunächst eindimensionalen Parameter  $\mu$ . Wir nehmen an, daß (3.1) für  $\mu = \mu_0$  einen homoklinen Orbit  $q(\cdot)$  an das hyperbolische Gleichgewicht  $p_0$  besitzt. Im folgenden werden uns nur diejenigen Lösungen von (3.1) interessieren, die zumindest für kompakte Zeitintervalle in der Nähe des Orbits  $\gamma(q_0)$  bleiben. Wir wählen einen zu  $\gamma(q_0)$  transversalen Schnitt  $\Sigma$  bei  $q_0$  und wollen nun periodische Orbits finden, die sich bezüglich einer kleinen tubularen Umgebung von  $\gamma(q_0)$  einmal um den Orbit  $\gamma(q_0)$  herumwinden. Dann kann man folgendes zeigen, vergleiche [29].

Zu jedem  $\omega \geq \Omega$  groß genug und  $\mu$  nahe bei  $\mu_0$  existiert eine eindeutige Lösung  $x_{(\omega, \mu)}(\cdot)$  von (3.1) auf dem Intervall  $[-\omega, \omega]$  mit den folgenden Eigenschaften :

- $x_{(\omega, \mu)}(-\omega), x_{(\omega, \mu)}(\omega) \in \Sigma$
- $x_{(\omega, \mu)}(0)$  ist nahe bei  $p_0$
- $\left( x_{(\omega, \mu)}(-\omega) - x_{(\omega, \mu)}(\omega) \right) \in Z$ .

Dabei ist  $Z$  der von den beschränkten Lösungen der adjungierten Variationsgleichung von  $q(t)$  aufgespannte Vektorraum, beziehungsweise dessen Projektion auf  $\Sigma$ . Im allgemeinen wird nun  $\dim Z = 1$  sein. Dann haben wir das Problem auf eine einzige Gleichung in den Variablen  $(\omega, \mu)$  reduziert, wobei  $\omega$  die halbe Rückkehrzeit ist. Jeder Lösung  $(\omega_*, \mu_*)$  dieser eindimensionalen reduzierten Gleichung entspricht ein periodischer Orbit für  $\mu = \mu_*$  mit Periode  $2\omega_*$ . Ein ähnliches Resultat gilt auch für Orbits, die sich  $N$ -mal um  $\gamma(q_0)$  herumwinden.

Die Beweisidee besteht darin, eine Lösung  $x(\cdot)$  von (3.1) durch die nichtlineare Variationsgleichung entlang  $q(t)$  darzustellen. Wir definieren also  $x(t) = q(t) + v(t)$ . Dann besteht  $v(t)$  aus den Teilstücken  $v(t)$ , definiert für  $t \geq 0$ , und  $\hat{v}(t)$ , definiert für  $t \leq 0$ , vergleiche Abbildung 11.



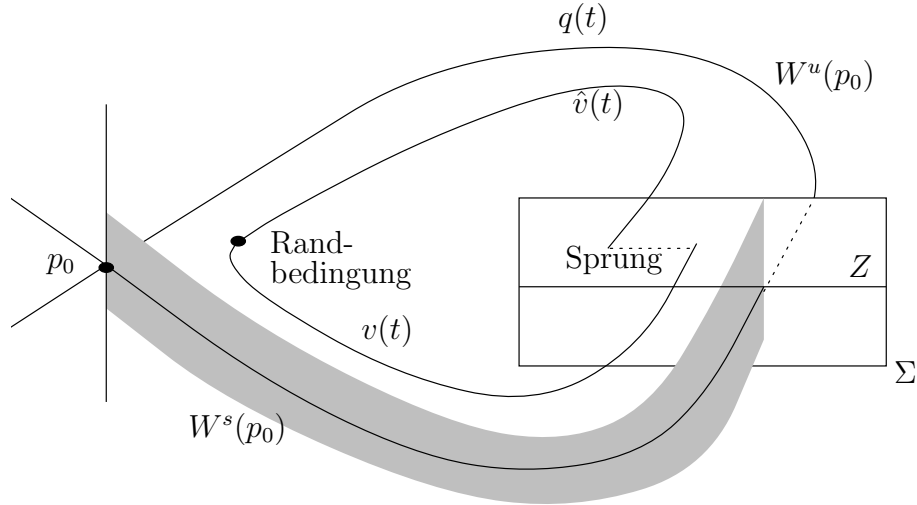


Abbildung 11: Lins Methode

Jede dieser Kurven löst die Differentialgleichung

$$(3.2) \quad \dot{v} - Av = Df(q(t))v + g(t, v, \mu),$$

wobei  $g(t, v) = f(q(t) + v, \mu) - f(q(t), \mu_0) - Df(q(t), \mu_0)v$  klein ist. Wir können daher zunächst beliebige Lösungen  $v(t)$  und  $\hat{v}(t)$  von (3.2) für  $t \in [0, \omega]$  beziehungsweise  $t \in [-\omega, 0]$  betrachten. Diese Lösungen müssen dann gewissen Bedingungen genügen. Zum einen muß die Randbedingung  $v(0) = \hat{v}(0)$  gelten. Außerdem muß die Sprungbedingung  $\hat{v}(-\omega) - v(\omega) \in Z$  erfüllt sein. Auf diese Art und Weise erhalten wir schließlich ein System von Integralgleichungen und zusätzlichen Randbedingungen, welches eindeutige Lösungen  $(v, \hat{v})$  besitzt. Die Trajektorie  $x_{(\omega, \mu)}(t)$  erhalten wir nun, indem wir diese Teilstücke durch

$$x_{(\omega, \mu)}(\omega - t) = q(t) + v(t)$$

für  $t \in [0, \omega]$  und analog für  $t \leq 0$  zusammen setzen.

Die Verzweigungsgleichungen sind durch die Sprünge  $\hat{v}(-\omega) - v(\omega)$  in  $Z$ -Richtung gegeben. Sie setzen sich aus zwei Größen zusammen. Der eine Beitrag ist durch das Auseinanderbrechen der homoklinen Verbindung gegeben. Generisch wird der Abstand der Schnittflächen von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit in  $p_0$  mit  $\Sigma$  ungleich 0 werden, sobald  $\mu \neq \mu_0$  ist. Der andere Beitrag zu den Verzweigungsgleichungen stammt von  $\omega$ . Denn für  $\omega < \infty$  werden zusätzliche Beiträge in den reduzierten Gleichungen zu erwarten sein. Tatsächlich sollten sich diese beiden Beiträge auf verschiedene Art in den reduzierten Gleichungen niederschlagen. Der erste Beitrag sollte im wesentlichen nur von  $\mu$  abhängen, der zweite dagegen nur von  $\omega$ . In den Verzweigungsgleichungen, wie sie von Lin [29] angegeben wurden, ist diese Zerlegung nicht sichtbar. Dadurch bedingt wird das Lösen dieser Gleichungen unmöglich, sobald wir Orbits betrachten, die  $\Sigma$  mehrfach treffen. Außerdem entstehen zusätzliche Schwierigkeiten bei Problemen mit zweidimensionalen Parametern, da

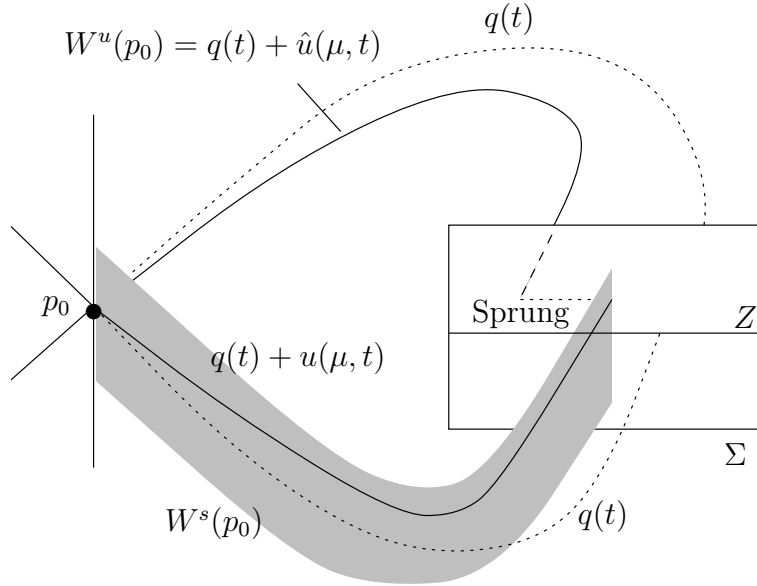


Abbildung 12: Die Lösungen  $q(\cdot) + u(\mu, \cdot)$  und  $q(\cdot) + \hat{u}(\mu, \cdot)$

die führenden Terme nicht mehr bestimmt werden können.

Der Ausweg besteht in einer anderen Koordinatenwahl. Zuerst wenden wir Lins Methode auf Gleichung (3.1) mit  $\omega = \infty$  an. Wir erhalten Lösungen  $q(t) + u(\mu, t)$  für  $t \geq 0$  beziehungsweise  $q(t) + \hat{u}(\mu, t)$  für  $t \leq 0$ , die in den invarianten Mannigfaltigkeiten von  $p_0$  liegen:

$$q(0) + u(\mu, 0) \in W^s(\mu, p_0) \quad \text{und} \quad q(0) + \hat{u}(\mu, 0) \in W^u(\mu, p_0).$$

Außerdem ist die Differenz  $\hat{u}(\mu, 0) - u(\mu, 0) \in Z$  wieder in  $Z$ , vergleiche Abbildung 12.

Statt nun die Lösungen  $x(t)$  von (3.1) wie oben in Gleichung (3.2) als Störungen von  $q(t)$  zu behandeln, definieren wir neue, parameterabhängige Koordinaten relativ zu  $q(\cdot) + u(\mu, \cdot)$  und  $q(\cdot) + \hat{u}(\mu, \cdot)$  durch

$$x(t) = \begin{cases} q(t) + u(\mu, t) + v(t) & \text{für } t \geq 0 \\ q(t) + \hat{u}(\mu, t) + \hat{v}(t) & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Wir werden sehen, daß wir die grundlegende Theorie in [29] trotz dieser zusätzlichen Parameterabhängigkeiten verwenden können. Entscheidend ist nun, daß durch diese Koordinatenwahl die oben beschriebenen Beiträge zu den reduzierten Gleichungen getrennt werden. Denn der Sprung der Lösung  $x_{(\omega, \mu)}(\cdot)$  in  $Z$  setzt sich nun aus zwei Beiträgen zusammen.

$$\begin{aligned} x_{(\omega, \mu)}(-\omega) - x_{(\omega, \mu)}(\omega) &= q(0) + \hat{u}(\mu, 0) + \hat{v}_{(\omega, \mu)}(0) - q(0) - u(\mu, 0) - v_{(\omega, \mu)}(0) \\ &= \left( \hat{u}(\mu, 0) - u(\mu, 0) \right) + \left( \hat{v}_{(\omega, \mu)}(0) - v_{(\omega, \mu)}(0) \right). \end{aligned}$$

Die erste Differenz ist unabhängig von  $\omega$  und beschreibt den Abstand der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von  $p_0$ . Dagegen ist der Beitrag der zweiten Differenz  $\hat{v}_{(\omega, \mu)}(0) -$

$v_{(\omega, \mu)}(0)$  zu den reduzierten Gleichungen nicht so einfach zu handhaben. Wir werden dazu die führenden Terme in dieser Differenz identifizieren und Abschätzungen des Restterms und seiner Ableitungen bereit stellen. Dies setzt die Wahl geeigneter Koordinaten und die Benutzung gewichteter Normen voraus.

## 3.2 Vorbereitungen

Betrachte die Differentialgleichung

$$(3.3) \quad \dot{x} + Ax = f(x, \mu) \quad (x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times M.$$

Hier sei  $M$  sei eine offene Umgebung von  $\mu_0$  im  $\mathbb{R}^p$  (oder in einem Banachraum). Ferner sei  $f \in C^{k+4}(\mathbb{R}^n \times M, \mathbb{R}^n)$  mit  $k \geq 2$ . Wir werden stets die folgende Annahmen voraussetzen.

**(H1)** Für  $\mu \in M$  besitze (3.3)  $N$  hyperbolische Gleichgewichte  $p_i$ , die o.B.d.A. nicht von  $\mu$  abhängen. Ferner existieren für  $\mu = \mu_0$  heterokline Orbits  $q_i(t)$ , die diese Gleichgewichte zyklisch verbinden

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} q_i(t) &= p_i \\ \lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) &= p_{i+1} \end{aligned} \right\} i \bmod N.$$

Wir werden in diesem Kapitel die folgende Konvention benutzen. Die mit  $\hat{\phantom{x}}$  versehenen Operatoren oder Lösungen sind für  $t \leq 0$ , die ohne  $\hat{\phantom{x}}$  dagegen für  $t \geq 0$  definiert. In diesem Abschnitt 3.2 wird der Index  $i$  stets die Menge  $\{1, \dots, N\}$  modulo  $N$  durchlaufen.

**Definition.** Wir bezeichnen mit  $A_i := A - Df(p_i, \mu_0)$  und  $A_i(t) := A - Df(q_i(t), \mu_0)$  die Linearisierungen in den Gleichgewichten  $p_i$ , beziehungsweise entlang der heteroklinen Lösungen für  $\mu = \mu_0$ . Das Spektrum der Linearisierungen  $A_i$  besitzt wegen (H1) eine Spektralzerlegung  $\sigma(-A_i) = \sigma_i^s \cup \sigma_i^u$  mit

$$\begin{aligned} \sigma_i^s &= \{\lambda \in \sigma(-A_i) / \operatorname{Re} \lambda < -\alpha_i^s\} \\ \sigma_i^u &= \{\lambda \in \sigma(-A_i) / \operatorname{Re} \lambda > \alpha_i^u\} \end{aligned}$$

für geeignete  $\alpha_i^s, \alpha_i^u > 0$ . Die Spektralprojektionen werden mit  $P_i^s$  und  $P_i^u$  bezeichnet. Es sei  $\alpha_i := \min(\alpha_i^s, \alpha_i^u)$ .

Aus Lemma 1.1 folgt dann, daß die Variationsgleichungen

$$\dot{v} + A_i(t)v = 0$$

exponentielle Dichotomien  $\hat{P}_i^u(t)$  und  $P_{i+1}^s(t)$  für  $t \leq 0$  beziehungsweise  $t \geq 0$  besitzen. Die zugehörigen Halbgruppen  $T_i(t, s)$  erfüllen dann für ein kleines  $\gamma > 0$  die Ungleichungen

$$(3.4) \quad \begin{aligned} |T_i(t, s)P_{i+1}^s(s)| &\leq Ke^{-(\alpha_{i+1}^s+2\gamma)(t-s)} & 0 \leq s \leq t \\ |T_i(s, t)P_{i+1}^u(t)| &\leq Ke^{-(\alpha_{i+1}^u+2\gamma)(t-s)} & 0 \leq s \leq t \\ |T_i(s, t)\hat{P}_i^u(t)| &\leq Ke^{-(\alpha_i^u+2\gamma)(t-s)} & s \leq t \leq 0 \\ |T_i(t, s)\hat{P}_i^s(s)| &\leq Ke^{-(\alpha_i^s+2\gamma)(t-s)} & s \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Dabei sei  $P_i^u(t) := 1 - P_i^s(t)$  und ebenso  $\hat{P}_i^s(t) := 1 - \hat{P}_i^u(t)$ . Die nächste Annahme betrifft die Projektionen.

**(H2)** Es sei  $\mathbb{R}\hat{P}_i^u(0) \cap \mathbb{R}P_{i+1}^s(0) = \text{span } \dot{q}(0)$ .

Diese Annahme über den Schnitt der stabilen und instabilen Räume bei  $t = 0$  ist generisch.

Wir betrachten nun die zu  $T_i(t, s)$  adjungierten Halbgruppen  $T_i^*(s, t)$ , definiert durch

$$(3.5) \quad \langle \psi, T_i(t, s)v \rangle = \langle T_i^*(s, t)\psi, v \rangle$$

Dabei sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ . Die adjungierten Halbgruppen lösen in der Variablen  $s$  die Gleichungen

$$\dot{\psi} = A^*(s)\psi$$

und besitzen exponentielle Dichotomien, die durch die adjungierten Projektionen  $\hat{P}_i^u(t)^*$  und  $P_{i+1}^s(t)^*$  gegeben sind. Insbesondere gilt

$$(3.6) \quad \begin{cases} |T_i^*(t, s)P_{i+1}^u(s)^*| \leq Ke^{-(\alpha_{i+1}^u+2\gamma)(t-s)} & 0 \leq s \leq t \\ |T_i^*(s, t)\hat{P}_i^s(t)^*| \leq Ke^{-(\alpha_i^s+2\gamma)(t-s)} & s \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Dies folgt leicht aus (3.4) und (3.5).

**Definition.** Wir definieren

$$Z_i := \mathbb{R}\hat{P}_i^s(0)^* \cap \mathbb{R}P_{i+1}^u(0)^*$$

und bezeichnen mit  $\Psi_i(t) = T_i^*(t, 0)|_{Z_i}$  die auf  $Z_i$  eingeschränkte adjungierte Halbgruppe.

Dann gilt

$$(3.7) \quad |\Psi_i(t)| \leq \begin{cases} Ke^{-(\alpha_{i+1}^u+2\gamma)t} & t \geq 0 \\ Ke^{-(\alpha_i^s+2\gamma)t} & t \leq 0. \end{cases}$$

Der Raum  $Z_i$  besteht also aus denjenigen Anfangswerten, für die die zugehörigen Lösungen der adjungierten Gleichung beschränkt in  $t \in \mathbb{R}$  sind.

**Definition.** Weiterhin wählen wir jetzt Komplemente  $Y_i^u$  und  $Y_i^s$  von  $\text{span } \dot{q}_i(0)$  in  $\mathbb{R}\hat{P}_i^u(0)$  beziehungsweise in  $\mathbb{R}P_{i+1}^s(0)$ . Wir definieren  $Y_i := Y_i^u \oplus Y_i^s$ . Dann gilt wegen (H2)

$$\tilde{Y}_i := \text{span } \dot{q}_i(0) \oplus Y_i = \mathbb{R}\hat{P}_i^u(0) + \mathbb{R}P_{i+1}^s(0).$$

Ferner ist  $Z_i = \text{Ann } \tilde{Y}_i$  der Annihilator von  $\tilde{Y}_i$ , d.h

$$\langle \psi, \tilde{y} \rangle = 0 \quad \forall \psi \in Z_i \iff \tilde{y} \in \tilde{Y}_i.$$

Wir wählen nun linear unabhängige Vektoren  $\psi_{i,j} \in Z_i$  für  $j = 1, \dots, \dim Z_i$ . Ferner sei  $\Sigma_i := q_i(0) + (Z_i \oplus Y_i)$  eine zu  $\gamma(q_i)$  transversale Hyperebene.

Wir führen nun die später benötigten gewichteten Normen ein. Dazu definieren wir für  $\eta \geq 0$

$$\begin{aligned} V_\eta &:= \{v \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n) / \sup_{t \geq 0} e^{\eta t} |v(t)| =: \|v\|_\eta < \infty\} \\ \hat{V}_\eta &:= \{v \in C^0((-\infty, 0], \mathbb{R}^n) / \sup_{t \leq 0} e^{-\eta t} |v(t)| =: \|v\|_\eta < \infty\}. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen beginnen wir damit, die Existenz spezieller Lösungen in der stabilen beziehungsweise instabilen Mannigfaltigkeit zu zeigen. Wir betrachten Lösungen  $x(t)$  von (3.3) in der Nähe eines der heteroklinen Orbits  $q_i(t)$  und machen daher den Störungsansatz

$$x(t) = q_i(t) + u(t).$$

Dann löst  $x(t)$  die Gleichung (3.3) dann und nur dann, wenn  $u(t)$  die Differentialgleichung

$$(3.8) \quad \dot{u} + A_i(t)u = g_i(t, u, \mu), \quad u_0 \in \mathbb{R}^n$$

löst mit

$$g_i(t, u, \mu) := f(q_i(t) + u, \mu) - f(q_i(t), 0) - Df(q_i(t), 0)u.$$

Wir werden zunächst einige Eigenschaften des durch  $g_i$  auf  $V_{\alpha_{i+1}^s}$  beziehungsweise  $\hat{V}_{\alpha_i^u}$  definierten Nemitskii-Operators zeigen.

**Lemma 3.1** *Es sei  $g(t, v, \mu) := f(q(t) + v, \mu) - f(q(t), 0) - Df(q(t), 0)v$  mit  $q(\cdot) \in V_\eta$  und  $f \in C^{l+1}(\mathbb{R}^n \times M, \mathbb{R}^n)$  für  $l \geq 1$  mit  $f(0, \mu) = Df(0, 0) = 0$ . Dann ist  $G : V_\eta \times M \rightarrow V_\eta \in C^l$ , wobei  $G(v, \mu)(t) := g(t, v, \mu)$  sei.*

**Beweis.** Wir werden im folgenden alle Konstanten, die apriori durch  $f$  gegeben sind, gleich eins setzen. Außerdem bezeichne  $\|\cdot\|$  im weiteren die Norm  $\|\cdot\|_\eta$  auf  $V_\eta$ . Zunächst ist  $|g(t, v, \mu)| \leq |v(t)|^2 + |\mu|(|q(t)| + |v(t)|)$ . Deshalb bildet  $G$  den Raum  $V_\eta$  in sich ab. Wir zeigen nun die Differenzierbarkeit von  $G$ .

$$\begin{aligned} &\|G(v + \tilde{v}, \mu) - G(v, \mu) - D_v G(v, \mu)\tilde{v}\| \|\tilde{v}\|^{-1} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} e^{\eta t} \left| g(t, v(t) + \tilde{v}(t), \mu) - g(t, v(t), \mu) - D_v g(t, v(t), \mu)\tilde{v}(t) \right| \|\tilde{v}\|^{-1} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \sup_{s \in [0,1]} \left| D_v g(t, v(t) + s\tilde{v}(t), \mu) - D_v g(t, v(t), \mu) \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $\|\tilde{v}\| \rightarrow 0$ . Damit ist  $G$  stetig nach  $v$  differenzierbar mit

$$(3.9) \quad \|D_v G\| = \|D_v g(\cdot, v(\cdot), \mu)\| \leq C(\|v\| + |\mu|).$$

Anschließend zeigen wir die Differenzierbarkeit bezüglich  $\mu$ .

$$\begin{aligned}
& \|G(v, \mu + \tilde{\mu}) - G(v, \mu) - D_\mu G(v, \mu) \tilde{\mu}\| |\tilde{\mu}|^{-1} \\
& \leq \sup_{t \geq 0} e^{nt} |\tilde{\mu}|^{-1} \left| g(t, v(t), \mu + \tilde{\mu}) - g(t, v(t), \mu) - D_\mu g(t, v(t), \mu) \tilde{\mu} \right| \\
& \leq \sup_{t \geq 0} e^{nt} \sup_{s \in [0,1]} \left| D_\mu g(t, v(t), \mu + s\tilde{\mu}) - D_\mu g(t, v(t), \mu) \right| \\
& \leq \sup_{t \geq 0} e^{nt} \sup_{s \in [0,1]} \left| D_\mu f(q(t) + v(t), \mu + s\tilde{\mu}) - D_\mu f(q(t) + v(t), \mu) \right| \\
& \leq \sup_{t \geq T} \sup_{s \in [0,1]} \int_0^1 \left| D_x D_\mu f\left((q(t) + v(t))\tau, \mu + s\tilde{\mu}\right) - D_x D_\mu f\left((q(t) + v(t))\tau, \mu\right) \right| d\tau + \\
& \quad \sup_{t \in [0, T]} \sup_{s \in [0,1]} e^{nT} \left| D_\mu f(q(t) + v(t), \mu + s\tilde{\mu}) - D_\mu f(q(t) + v(t), \mu) \right| \\
& \rightarrow 0
\end{aligned}$$

für  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ . Dabei entsteht der erste Term aufgrund der Ungleichung  $|D_\mu f(x, \mu)| \leq C|x|$  für kleine  $|x|$ . Die Konvergenz gegen Null folgt nun aus der Stetigkeit von  $D_x D_\mu f$ . Die Existenz der höheren Ableitungen zeigt man analog. Wir verlieren hier eine Differenzierbarkeitsordnung bei den Ableitungen nach  $\mu$ .  $\square$

Wir wollen nun die in der Einleitung erwähnten Lösungen  $q_i(t) + u_i(\mu, t)$  konstruieren. Dazu betrachten wir zunächst ein linearisiertes Problem. Mit einem Fixpunktargument wird dann das volle nichtlineare Problem gelöst.

**Lemma 3.2** *Zu gegebenen  $(g, \hat{g}) \in V_{\alpha_{i+1}^s} \times \hat{V}_{\alpha_i^u + \gamma}$  existieren eindeutig bestimmte Lösungen  $(u, \hat{u}) = L_i^1(g, \hat{g}) \in V_{\alpha_{i+1}^s} \times \hat{V}_{\alpha_i^u + \gamma}$  der Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} u + A_i(t)u &= g(t) & \text{für } t \geq 0 \\
\frac{d}{dt} \hat{u} + A_i(t)\hat{u} &= \hat{g}(t) & \text{für } t \leq 0,
\end{aligned}$$

die die Sprungbedingung

$$(S) \quad \begin{cases} u(0), \hat{u}(0) & \in Z_i \oplus Y_i \\ \hat{u}(0) - u(0) & \in Z_i \end{cases}$$

erfüllen. Dabei ist  $L_i^1$  linear in  $(g, \hat{g})$ . Der Sprung in  $\psi_{i,j}$ -Richtung ist gegeben durch

$$\xi_{i,j}(g, \hat{g}) = \langle \psi_{i,j}, \hat{u}(0) - u(0) \rangle = \int_{-\infty}^0 \langle \psi_{i,j}(s), \hat{g}(s) \rangle ds + \int_0^\infty \langle \psi_{i,j}(s), g(s) \rangle ds.$$

**Beweis.** Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung mit  $(u, \hat{u})$  in den normierten Räumen ist gegeben durch

$$(3.10) \quad \begin{cases} \hat{u}(t) = T_i(t, 0) b^u + \int_0^t T_i(t, s) \hat{P}_i^u(s) \hat{g}(s) ds + \int_{-\infty}^t T_i(t, s) \hat{P}_i^s(s) \hat{g}(s) ds & \text{für } t \leq 0 \\ u(t) = T_i(t, 0) b^s + \int_0^t T_i(t, s) P_{i+1}^s(s) g(s) ds + \int_{-\infty}^t T_i(t, s) P_{i+1}^u(s) g(s) ds & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Dabei sind  $b^u \in \mathbb{R}\hat{P}_i^u(0)$  und  $b^s \in \mathbb{R}P_{i+1}^s(0)$  beliebig wählbar, vergleiche Lemma 1.1. Dann ist insbesondere

$$\begin{aligned}\hat{u}(0) &= b^u + \int_{-\infty}^0 T_i(0, s) \hat{P}_i^s(s) \hat{g}(s) ds =: b^u + J^s \\ u(0) &= b^s + \int_{-\infty}^0 T_i(0, s) P_{i+1}^u(s) g(s) ds =: b^s + J^u.\end{aligned}$$

Wir zerlegen

$$b^s = \zeta^s \dot{q}(0) + y^s, \quad b^u = \zeta^u \dot{q}(0) + y^u$$

mit  $\zeta^s, \zeta^u \in \mathbb{R}$ ,  $y^s \in Y_i^s$  und  $y^u \in Y_i^u$ . Die Sprungbedingung (S) ist dann äquivalent zu der Gleichung

$$\begin{aligned}\zeta^u &= -P(\text{span } \dot{q}(0), Z_i \oplus Y_i) J^s \\ \zeta^s &= -P(\text{span } \dot{q}(0), Z_i \oplus Y_i) J^u \\ y^u - y^s &= P(Y_i, \text{span } \dot{q}(0) \oplus Z_i) (J^s - J^u),\end{aligned}$$

wobei  $P(X, Y)$  die Projektion auf  $X$  mit Kern  $Y$  bezeichne. Diese Gleichungen sind nun eindeutig lösbar mit  $(b^s, b^u) = B_i^1(J^u, J^s)$ . Dabei ist  $B_i^1$  linear und stetig in  $(J^u, J^s)$ . Die Integrale wiederum sind linear in  $(g, \hat{g})$ . Wir zeigen noch die Stetigkeit von  $(J^u, J^s)$  in  $(g, \hat{g})$ .

$$\begin{aligned}& |J^u| + |J^s| \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^0 T_i(0, s) P_{i+1}^u(s) g(s) ds \right| + \left| \int_{-\infty}^0 T_i(0, s) \hat{P}_i^s(s) \hat{g}(s) ds \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^0 K e^{-(\alpha_{i+1}^u + 2\gamma)s} e^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)s} \|g\|_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} ds + \\ & \quad \int_{-\infty}^0 K e^{(\alpha_i^s + 2\gamma)s} e^{(\alpha_i^u + \gamma)s} \|\hat{g}\|_{\alpha_i^u + \gamma} ds \\ & \leq KC(\|g\|_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} + \|\hat{g}\|_{\alpha_i^u + \gamma}).\end{aligned}$$

Wir definieren nun  $(u, \hat{u})$  durch Gleichung (3.10), wobei wir dort  $B_i^1(J^u, J^s)$  für das Paar  $(b^s, b^u)$  einsetzen. Wir zeigen noch, daß  $(u, \hat{u}) = L_i^1(g, \hat{g})$  stetig in  $(g, \hat{g})$  ist.

$$\begin{aligned}|\hat{u}(t)| &\leq |T_i(t, 0) \hat{P}_i^u(0) b^u| + \int_0^t |T_i(t, s) \hat{P}_i^u(s)| |\hat{g}(s)| ds + \\ & \quad \int_{-\infty}^t |T_i(t, s) \hat{P}_i^s(s)| |\hat{g}(s)| ds \\ &\leq K e^{(\alpha_i^u + 2\gamma)t} |b^u|_{\alpha} + \int_0^t K e^{-(\alpha_i^u + 2\gamma)(s-t)} e^{(\alpha_i^u + \gamma)s} \|\hat{g}\| ds + \\ & \quad \int_{-\infty}^t K e^{-(\alpha_i^s + 2\gamma)(t-s)} e^{(\alpha_i^u + \gamma)s} \|\hat{g}\| ds \\ &\leq \left( K^2 C e^{(\alpha_i^u + 2\gamma)t} + \int_0^t K e^{-\gamma(s-t)} e^{(\alpha_i^u + \gamma)t} ds + \right. \\ & \quad \left. \int_{-\infty}^t K e^{-(\alpha_i^s + 2\gamma)t} e^{(\alpha_i^u + \alpha_i^s + 3\gamma)s} ds \right) (\|g\|_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} + \|\hat{g}\|_{\alpha_i^u + \gamma})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C e^{(\alpha_i^u + \gamma)t} \left( \|g\|_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} + \|\hat{g}\|_{\alpha_i^u + \gamma} \right) \\
|u(t)| &\leq |T_i(t, 0) P_{i+1}^s(0) b^s| + \int_0^t |T_i(t, s) P_{i+1}^s(s)| |g(s)| ds + \\
&\quad \int_{-\infty}^t |T_i(t, s) P_{i+1}^u(s)| |g(s)| ds \\
&\leq K e^{-(\alpha_{i+1}^s + 2\gamma)t} |b^s| + \int_0^t K e^{-(\alpha_{i+1}^s + 2\gamma)(t-s)} e^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)s} \|g\| ds + \\
&\quad \int_{-\infty}^t K e^{-(\alpha_{i+1}^u + 2\gamma)(s-t)} e^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)s} \|g\| ds \\
&\leq \left( K^2 C e^{-(\alpha_{i+1}^s + 2\gamma)t} + \int_0^t K e^{-\gamma(t-s)} e^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)t} ds + \right. \\
&\quad \left. \int_{-\infty}^t K e^{-(\alpha_{i+1}^u + 2\gamma)t} e^{-(\alpha_{i+1}^s + \alpha_{i+1}^u + 3\gamma)s} ds \right) \left( \|g\|_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} + \|\hat{g}\|_{\alpha_i^u + \gamma} \right) \\
&\leq C e^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)t} \left( \|g\|_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} + \|\hat{g}\|_{\alpha_i^u + \gamma} \right).
\end{aligned}$$

Wir müssen noch die Behauptung über den Sprung zeigen. Dazu beachten wir, daß nach der Wahl von  $(b^s, b^u)$  die Differenz  $\hat{u}(0) - u(0) \in Z_i$  ist. Daher ist

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{i,j}, \hat{u}(0) - u(0) \rangle &= \left\langle \psi_{i,j}, \int_{-\infty}^0 T_i(0, s) \hat{P}_i^s(s) \hat{g}(s) ds + \int_0^{\infty} T_i(0, s) P_{i+1}^u(s) g(s) ds \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^0 \langle \psi_{i,j}(s), \hat{g}(s) \rangle ds + \int_0^{\infty} \langle \psi_{i,j}(s), g(s) \rangle ds
\end{aligned}$$

der Sprung in  $\psi_{i,j}$ -Richtung, denn nach Definition spannen die Vektoren  $\psi_{i,j}$  den Unterraum  $\text{Ann}\left(\text{R}\hat{P}_i^u(0) + \text{R}P_{i+1}^s(0)\right)$  auf. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Wir wenden uns nun dem nichtlinearen Problem zu.

**Lemma 3.3** *Es existieren eindeutig bestimmte Lösungen  $u_i(\mu) : M \rightarrow V_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} \in C^{k+3}$ , beziehungsweise  $\hat{u}_i(\mu) : M \rightarrow \hat{V}_{\alpha_i^u + \gamma} \in C^{k+3}$  von Gleichung (3.8) mit den Eigenschaften*

$$(S) \text{ Sprungbedingung} \quad \begin{cases} u_i(0), \hat{u}_i(0) & \in Z_i \oplus Y_i \\ \xi_i^\infty(\mu) = \hat{u}_i(0) - u_i(0) & \in Z_i. \end{cases}$$

Die Komponenten des Sprungs  $\xi_i^\infty \in C^{k+3}$  sind durch

$$\xi_{i,j}^\infty(\mu) = \int_{-\infty}^0 \langle \psi_{i,j}(t), g(t, u_i(\mu, t), \mu) \rangle dt + \int_0^{\infty} \langle \psi_{i,j}(t), g(t, \hat{u}_i(\mu, t), \mu) \rangle dt$$

gegeben. Ferner ist  $\xi_i^\infty(\mu_0) = 0$  und die Ableitung bei  $\mu = \mu_0$  ist das Melnikovintegral

$$\frac{d}{d\mu} \xi_{i,j}^\infty(\mu_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi_{i,j}(t), D_\mu f(q_i(t), \mu_0) \rangle dt.$$

**Beweis.** Wir müssen das Fixpunktproblem

$$(3.11) \quad (u, \hat{u}) = L_i^1(G_i(u, \mu), \hat{G}_i(\hat{u}, \mu))$$



in  $V_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} \times \hat{V}_{\alpha_i^u + \gamma}$  lösen. Aus Lemma 3.1 folgt zunächst, daß die rechte Seite von (3.11) eine  $C^{k+3}$ -Abbildung von  $V_{\alpha_{i+1}^s + \gamma} \times \hat{V}_{\alpha_i^u + \gamma}$  in sich definiert. Außerdem ist  $\mu = \mu_0$  und  $(u, \hat{u}) = 0$  eine Lösung von (3.11). Die Ableitung der rechten Seite von (3.11) nach  $(u, \hat{u})$  ist gegeben durch  $L_i^1 \circ (DG_i(u, \mu), D\hat{G}_i(\hat{u}, \mu))$ , wobei die Norm wegen (3.9) durch

$$\|L_i^1 \circ (DG_i(u, \mu), D\hat{G}_i(\hat{u}, \mu))\| \leq C(|\mu - \mu_0| + \|u\| + \|\hat{u}\|)$$

abgeschätzt werden kann für  $\mu \in M$  und  $\|u\|, \|\hat{u}\|$  klein. Nach [8, Thm. 2.2.3] existiert dann ein eindeutiger Fixpunkt  $(u_i(\mu), \hat{u}_i(\mu)) \in C^{k+3}$  von Gleichung (3.11). Die Aussage über die Ableitung des Sprungs bei  $\mu = \mu_0$  folgt aus der Integraldarstellung von  $\xi_{i,j}$  in Lemma 3.2.  $\square$

**Bemerkung 3.4** *Tatsächlich sind  $u_i(\mu)$  und  $\hat{u}_i(\mu)$  in  $C^{k+4}$  in Funktionenräumen mit nicht gewichteten Normen, vergleiche [41, Lemma 10].*

Die in Lemma 3.3 gefundenen Lösungen erfüllen natürlich  $q_i(t) + u_i(t) \in W^s(\mu, p_{i+1})$  für  $t \geq 0$  und  $q_i(t) + \hat{u}_i(t) \in W^u(\mu, p_i)$  für  $t \leq 0$ . Im weiteren werden wir diese Lösungen als ‘‘Koordinatensystem’’ zugrunde legen. Wir zerlegen Lösungen von  $\dot{x} + Ax = f(x, \mu)$ , die nahe bei  $q_i(t)$  verlaufen, in

$$(3.12) \quad \begin{cases} x(t) = q_i(t) + u_i(\mu, t) + v_i(t) & \text{für } t \geq 0 \\ x(t) = q_i(t) + \hat{u}_i(\mu, t) + \hat{v}_i(t) & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Dann erfüllen die Funktionen  $v_i(t)$  und  $\hat{v}_i(t)$  die Differentialgleichung

$$(3.13) \quad \dot{v} + A_i(\mu, t)v = g_i(t, v, \mu)$$

mit

$$A_i(\mu, t) := \begin{cases} A - D_x f(q_i(t) + u_i(\mu, t), \mu) & \text{für } t \geq 0 \\ A - D_x f(q_i(t) + \hat{u}_i(\mu, t), \mu) & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

und

$$g_i(t, v, \mu) := \begin{cases} f(q_i(t) + u_i(t) + v, \mu) - f(q_i(t) + u_i(t), \mu) - A_i(\mu, t)v & \text{für } t \geq 0 \\ f(q_i(t) + \hat{u}_i(t) + v, \mu) - f(q_i(t) + \hat{u}_i(t), \mu) - A_i(\mu, t)v & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Dabei sind  $A_i(\mu)$  und  $g(t, v, \mu)$  nur noch  $(k+3)$ -mal differenzierbar in  $\mu$ .

**Bemerkung 3.5** *Es ist  $A - A_i(\mu) : M \rightarrow C^0(\mathbb{R}^\pm, L(\mathbb{R}^n)) \in C^{k+3}$  bezüglich  $\mu$ .*

**Beweis.** Dies folgt aus  $u_i(\mu) \in C^{k+3}$  und  $u_i(\mu, t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , der entsprechenden Eigenschaft von  $\hat{u}_i(\mu)$  sowie aus  $f \in C^{k+4}$ .  $\square$

Aus Lemma 1.1 folgt daher, daß die Halbgruppen  $T_i(\mu, t, s)$  der parameterabhängigen Gleichungen

$$\dot{v} + A_i(\mu, t)v = 0$$

exponentielle Dichotomien  $\hat{P}_i^u(\mu, t)$  für  $t \leq 0$  und  $P_{i+1}^s(\mu, t)$  für  $t \geq 0$  besitzen mit

$$(3.14) \quad \begin{cases} |D_\mu^j(T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^s(\mu, s))| \leq Ke^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)(t-s)} & 0 \leq s \leq t \\ |D_\mu^j(T_i(\mu, s, t) P_{i+1}^u(\mu, t))| \leq Ke^{-(\alpha_{i+1}^u + \gamma)(t-s)} & 0 \leq s \leq t \\ |D_\mu^j(T_i(\mu, s, t) \hat{P}_i^u(\mu, t))| \leq Ke^{-(\alpha_i^u + \gamma)(t-s)} & s \leq t \leq 0 \\ |D_\mu^j(T_i(\mu, t, s) \hat{P}_i^s(\mu, s))| \leq Ke^{-(\alpha_i^s + \gamma)(t-s)} & s \leq t \leq 0 \end{cases}$$

für  $0 \leq j \leq k+3$ . Wir definieren ferner  $\Psi_i(\mu, t)$  durch  $\Psi_i(\mu, t) := T_i^*(\mu, t, 0)|_{Z_i(\mu)}$ . Dabei ist wieder  $Z_i(\mu) = \mathbb{R}\hat{P}_i^s(\mu, 0)^* \cap \mathbb{R}P_{i+1}^u(\mu, 0)^*$  und es folgt

$$|\Psi_i(\mu, t)| \leq \begin{cases} Ke^{-\alpha_{i+1}^u t} & t \geq 0 \\ Ke^{-\alpha_i^s t} & t \leq 0. \end{cases}$$

Die gleichen Abschätzungen gelten auch für die Ableitungen nach  $\mu$ .

### 3.3 Die Reduktion

In diesem Abschnitt 3.3 durchlaufen die Indizes  $i$  und  $j$  die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen.

#### 3.3.1 Die Verzweigungsgleichungen

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten  $W_{loc}^s(\mu, p_i)$  und  $W_{loc}^u(\mu, p_i)$  für  $\mu \in M$  in den entsprechenden Eigenräumen  $E_i^s$  und  $E_i^u$  enthalten sind. Dann ist die Nichtlinearität  $f \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n \times M, \mathbb{R}^n)$  nur noch  $(k+2)$ -mal differenzierbar und es gilt weiterhin

$$(3.15) \quad \begin{aligned} P_{i+1}^s(\mu, t) &= P_{i+1}^s & \text{für } t \geq \Omega \\ \hat{P}_i^u(\mu, t) &= P_i^u & \text{für } t \leq -\Omega \end{aligned}$$

für  $\Omega > 0$  hinreichend groß. Weiterhin wählen wir in der Nähe von  $q_i(0)$  Koordinaten, so daß die stabile Mannigfaltigkeit  $W^s(\mu, p_{i+1})$  lokal in  $\mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, 0)$  enthalten ist in einer Umgebung von  $q_i(0) + u_i(\mu, 0)$ . Die entsprechende Aussage soll außerdem simultan für die instabile Mannigfaltigkeit  $W^u(\mu, p_i)$  in der Nähe von  $q_i(0) + \hat{u}_i(\mu, 0)$  gelten. Das dies möglich ist, zeigt das nächste Lemma.

**Lemma 3.6** *Es existieren Koordinaten lokal um  $q_i(0)$  herum, so daß folgendes gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, 0) &= \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0), & W^s(\mu, p_{i+1}) &\subset \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0) \\ \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu, 0) &= \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0), & W^u(\mu, p_i) &\subset \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0). \end{aligned}$$

Bei dieser Koordinatentransformation bleiben  $q_i(0) + u_i(\mu, 0)$  und  $q_i(0) + \hat{u}_i(\mu, 0)$  unverändert, insbesondere ist die Differenz  $\hat{u}_i(\mu, 0) - u_i(\mu, 0)$  weiterhin in  $Z_i$ . Außerdem hängen nach einer geeigneten Wahl der exponentiellen Dichotomien die Projektionen  $P_{i+1}^u(\mu, 0)^*$  und  $\hat{P}_i^s(\mu, 0)^*$  nicht von  $\mu$  ab.

**Beweis.** Entscheidend ist hier, daß aufgrund von (H2) die Gleichung  $\mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0) \cap \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0) = \text{span } q_i(0)$  gilt. Zunächst begradigen wir das Vektorfeld gleichmäßig in  $\mu$  lokal um  $q_i(0)$ , siehe [1, 2.1.1, Satz 1]. Dabei bleibt die Hyperebene  $\Sigma_i$  unverändert. Wir müssen nun die gewünschten Transformationen nur noch in  $\Sigma_i$  suchen, denn eine lineare Fortsetzung liefert dann wegen der Begradigung des Vektorfeldes die Transformation in einer ganzen Umgebung des Schnitts. In  $\Sigma_i$  gilt

$$\mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0) \cap \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0) \cap \Sigma_i = \{0\}$$

und wir haben nach Definition eine Zerlegung von  $\Sigma_i$  in  $\mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0) \oplus \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0) \oplus Z_i$  (in diesem Lemma werden wir ab jetzt den Schnitt mit  $\Sigma_i$  weglassen). Deshalb ist die Abbildung

$$\begin{aligned} J_i(\mu) : x &\mapsto (v^s, v^u, z) \\ x &= q(0) + u_i(\mu, 0) + v^s + v^u + z \end{aligned}$$

mit  $(v^s, v^u, z) \in \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0) \oplus \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0) \oplus Z_i$  ein Isomorphismus von  $\Sigma_i$  auf eine Umgebung der Null im  $\mathbb{R}^{n-1}$  für alle  $\mu$  mit  $|\mu - \mu_0|$  klein.

Dann können wir  $W^s(\mu, p_{i+1})$  als Graph einer  $C^{k+3}$ -Abbildung  $h_i^s(v^s, \mu)$  über  $q_i(0) + u_i(\mu, 0) + \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0)$  schreiben mit  $h_i^s(0, \mu) = D_x h_i^s(0, \mu_0) = 0$ ; ebenso ist  $W^u(\mu, p_i)$  der Graph von  $h_i^u$  über  $q_i(0) + \hat{u}_i(\mu, 0) + \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0)$ . Wir betrachten nun die Abbildung

$$\tilde{H}_i : v^s + v^u + z \mapsto v^s + v^u + z + h_i^s(v^s, \mu) + h_i^u(v^u, \mu)$$

und behaupten, daß  $H_i := J_i^{-1} \circ \tilde{H}_i \circ J_i$  die gewünschte Transformation ist. Denn zunächst ist  $H_i$  für alle  $\mu$  mit  $|\mu - \mu_0|$  klein ein Diffeomorphismus. Ferner wird  $q(0) + u_i(\mu, 0) + z$  auf sich abgebildet für alle  $z \in Z_i$ . Insbesondere bleiben  $q(0) + u_i(\mu, 0)$  und  $q(0) + \hat{u}_i(\mu, 0)$  unverändert. Wir sehen leicht, daß  $q(0) + u_i(\mu, 0) + v^s$  in die stabile Mannigfaltigkeit und  $q(0) + \hat{u}_i(\mu, 0) + v^u = q(0) + u_i(\mu, 0) + v^u + z$  mit  $z = \hat{u}_i(\mu, 0) - u_i(\mu, 0)$  in die instabile Mannigfaltigkeit abgebildet werden.

Wir betrachten jetzt unsere Differentialgleichung in den neuen Koordinaten und wenden erneut Lemma 1.1 auf die Linearisierungen entlang  $q(t) + u(\mu, t)$  für  $t \geq 0$  und  $q(t) + \hat{u}(\mu, t)$  für  $t \leq 0$  an. Wir erhalten wieder exponentielle Dichotomien mit den Eigenschaften (3.14) (allerdings nur in  $C^{k+2}$ ), die wieder mit  $P_{i+1}^s$  und  $\hat{P}_i^u$  bezeichnet werden. Dann ist aber  $\mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, 0) = \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0)$  und nach der Konstruktion in Lemma 1.1 gilt auch  $\mathbb{R}P_{i+1}^u(\mu, 0) = \mathbb{R}P_{i+1}^u(\mu_0, 0)$ . Insbesondere hängt  $P_{i+1}^u(\mu, 0)^*$  nicht von  $\mu$  ab. Gleiches gilt für  $\hat{P}_i^s(\mu, 0)^*$ . Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Für jede Familie  $\omega = (\omega_i)$  mit  $\omega_i \geq \Omega$  für  $i \in \mathbb{Z}$  suchen wir nun Lösungen  $x_i(\omega, \mu; t)$  für  $t \in [0, \omega_{i+1}]$  beziehungsweise  $\hat{x}_i(\omega, \mu; t)$  für  $t \in [-\omega_i, 0]$  von (3.3) mit folgenden Eigenschaften (vergleiche Abbildung 13).

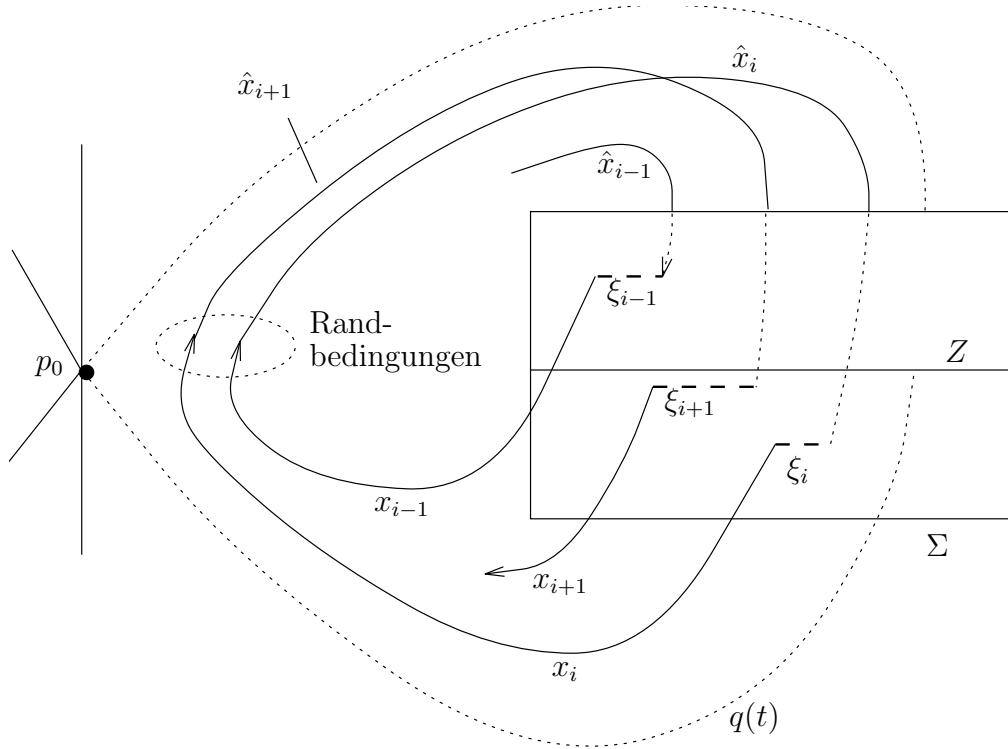


Abbildung 13: Darstellung der Bedingungen (R) und (S) aus (3.16)

$$(3.16) \quad \begin{aligned} (R) \quad & x_{i-1}(\boldsymbol{\omega}, \mu; \omega_i) = \hat{x}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; -\omega_i) \\ (S) \quad & \begin{cases} x_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0), \hat{x}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) \in \Sigma_i \\ \hat{x}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) - x_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) \in Z_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Es bezeichne nun

$$(3.17) \quad d_i(\mu, \omega_i) := q_i(-\omega_i) + \hat{u}_i(\mu, -\omega_i) - q_{i-1}(\omega_i) - u_{i-1}(\mu, \omega_i)$$

Die Bedingungen (3.16) können wir in äquivalenter Form in den durch (3.12) definierten Variablen  $v_i$  und  $\hat{v}_i$  schreiben:

( $v_i, \hat{v}_i$ ) seien Lösungen der Differentialgleichung

$$(3.18) \quad \dot{v} + A_i(\mu, t)v = g_i(t, v, \mu)$$

(vergleiche (3.13)) und es gilt außerdem

$$(3.19) \quad \begin{aligned} (R) \quad & v_{i-1}(\boldsymbol{\omega}, \mu; \omega_i) - \hat{v}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; -\omega_i) = d_i(\mu, \omega_i) \\ (S) \quad & \begin{cases} v_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0), \hat{v}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) \in Z_i \oplus Y_i \\ \hat{v}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) - v_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) =: \xi_i(\boldsymbol{\omega}, \mu) \in Z_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei beachten wir, daß

$$(3.20) \quad \hat{x}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) - x_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) = q_i(0) + \hat{u}_i(\mu, 0) + \hat{v}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(q_i(0) + u_i(\mu, 0) + v_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0)\right) \\
& = \hat{u}_i(\mu, 0) - u_i(\mu, 0) + \hat{v}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) - v_i(\boldsymbol{\omega}, \mu; 0) \\
& = \xi_i^\infty(\mu) + \xi_i(\boldsymbol{\omega}, \mu) =: \Xi_i(\boldsymbol{\omega}, \mu)
\end{aligned}$$

ist und nach Lemma 3.3 ist  $\xi_i^\infty(\mu) \in Z_i$ .

Für die Fehlerabschätzungen benötigen wir wie angekündigt zwei gewichtete Normen. Diese werden der Kontraktion in der globalen stabilen Mannigfaltigkeit und dem exponentiellen Wachstum in der transversalen Richtung für  $t \geq 0$  (beziehungsweise der Kontraktion in der instabilen Fläche und der Expansion transversal dazu für  $t \leq 0$ ) Rechnung tragen.

**Definition.** Für  $\eta \geq 0$  und  $0 < \omega < \infty$  definieren wir

$$\begin{aligned}
V_{l,\eta}(\omega) & := \left\{ v \in C^0([0, \omega], \mathbb{R}^n) / \sup_{t \in [0, \omega]} e^{\eta t} |v(t)| =: \|v\|_{l,\eta} < \infty \right\} \\
\hat{V}_{l,\eta}(\omega) & := \left\{ \hat{v} \in C^0([- \omega, 0], \mathbb{R}^n) / \sup_{t \in [- \omega, 0]} e^{-\eta t} |\hat{v}(t)| =: \|\hat{v}\|_{l,\eta} < \infty \right\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
V_{f,\eta}(\omega) & := \left\{ v \in C^0([0, \omega], \mathbb{R}^n) / \sup_{t \in [0, \omega]} e^{\eta(\omega-t)} |v(t)| =: \|v\|_{f,\eta} < \infty \right\} \\
\hat{V}_{f,\eta}(\omega) & := \left\{ \hat{v} \in C^0([- \omega, 0], \mathbb{R}^n) / \sup_{t \in [- \omega, 0]} e^{\eta(\omega+t)} |\hat{v}(t)| =: \|\hat{v}\|_{f,\eta} < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

Im folgenden werden wir den Index  $\eta$  weglassen, wenn klar ist, welche exponentielle Rate wir gerade benutzen. Mit  $V_0(\omega)$  und  $\hat{V}_0(\omega)$  bezeichnen wir die Räume in der Supremumsnorm.

Ferner sei

$$\begin{aligned}
V_i & := V_{l,\alpha_{i+1}^s}(\omega_{i+1}) \times V_{f,\alpha_{i+1}^u}(\omega_{i+1}) \\
\hat{V}_i & := \hat{V}_{f,\alpha_i^s}(\omega_i) \times V_{l,\alpha_i^u}(\omega_i)
\end{aligned}$$

und

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{V} & := \prod_{i \in \mathbb{Z}} V_i \\
\hat{\mathcal{V}} & := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \hat{V}_i
\end{aligned} \right\} \text{ versehen mit der Supremumsnorm in } i.$$

Ebenso bezeichne  $\mathcal{V}_0$  und  $\hat{\mathcal{V}}_0$  das Produkt von  $V_0(\omega_i)$  und  $\hat{V}_0(\omega_i)$ . Diese Produkträume sind vollständig.

Wie bei der Konstruktion der  $u_i(\mu)$  und  $\hat{u}_i(\mu)$  beweisen wir zunächst linearisierte Versionen von (3.19). Wir lösen als erstes die Integralgleichung

$$(3.21) \left\{ \begin{aligned}
\hat{v}(t) & = T_i(\mu, t, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a^s + \int_{-\omega_i}^t T_i(\mu, t, s) \hat{P}_i^s(\mu, s) \hat{g}^s(s) ds + \\
& \quad T_i(\mu, t, 0) \hat{P}_i^u(\mu, 0) b^u + \int_0^t T_i(\mu, t, s) \hat{P}_i^u(\mu, s) \hat{g}^u(s) ds \\
v(t) & = T_i(\mu, t, \omega_{i+1}) P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1}) a^u + \int_{\omega_{i+1}}^t T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^u(\mu, s) g^u(s) ds + \\
& \quad T_i(\mu, t, 0) P_{i+1}^s(\mu, 0) b^s + \int_0^t T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^s(\mu, s) g^s(s) ds.
\end{aligned} \right.$$

**Lemma 3.7** Zu gegebenen  $g = (g^s, g^u) \in V_i$ ,  $\hat{g} = (\hat{g}^s, \hat{g}^u) \in \hat{V}_i$ ,  $a^s \in \mathbb{R}P_i^s$  und  $a^u \in \mathbb{R}P_{i+1}^u$  existieren eindeutig bestimmte Lösungen

$$(v, \hat{v}) = L_i^2(\mu, a^s, a^u, g, \hat{g}) \in V_0(\omega_{i+1}) \times \hat{V}_0(\omega_i)$$

von (3.21) mit folgenden Eigenschaften.

$$(N) \quad \begin{cases} \left( \hat{P}_i^s(\mu, \cdot) \hat{v}(\cdot), \hat{P}_i^u(\mu, \cdot) \hat{v}(\cdot) \right) & \in \hat{V}_i \\ \left( P_{i+1}^s(\mu, \cdot) v_i(\cdot), P_{i+1}^u(\mu, \cdot) v(\cdot) \right) & \in V_i \end{cases}$$

$$(R1) \quad \begin{cases} \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) \hat{v}(-\omega_i) & = \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a^s \\ P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1}) v(\omega_{i+1}) & = P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1}) a^u \end{cases}$$

$$(S) \quad \begin{cases} v(0), \hat{v}(0) & \in Z_i \oplus Y_i \\ v(0) - \hat{v}(0) & \in Z_i. \end{cases}$$

Darüberhinaus ist  $L_i^2$  linear in  $(a^s, a^u, g, \hat{g})$  und  $C^{k+2}$  in  $\mu$  mit Normen unabhängig von  $(\omega_i, \omega_{i+1})$ . Das gleiche gilt, wenn wir  $L_i^2$  aufgrund von (N) als Abbildung nach  $V_i \times \hat{V}_i$  auffassen.

**Beweis.** Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.18), die (R1) erfüllt, ist durch (3.21) gegeben. Wir projizieren diese Integralgleichungen nun in die stabilen und instabilen Räume und erhalten

$$(3.22) \quad \begin{cases} \hat{v}^s(t) & = T_i(\mu, t, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a^s + \int_{-\omega_i}^t T_i(\mu, t, s) \hat{P}_i^s(\mu, s) \hat{g}^s(s) ds \\ \hat{v}^u(t) & = T_i(\mu, t, 0) b^u + \int_0^t T_i(\mu, t, s) \hat{P}_i^u(\mu, s) \hat{g}^u(s) ds \\ v^u(t) & = T_i(\mu, t, \omega_{i+1}) P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1}) a^u + \int_{\omega_{i+1}}^t T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^u(\mu, s) g^u(s) ds \\ v^s(t) & = T_i(\mu, t, 0) b^s + \int_0^t T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^s(\mu, s) g^s(s) ds \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, daß es eindeutig bestimmte Vektoren  $b = (b^s, b^u) \in \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, 0) \times \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu, 0)$  gibt, so daß die durch (3.22) definierten Lösungen die Bedingung (S) erfüllen. Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{v}(0) &= b^u + T_i(\mu, 0, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a^s + \int_{-\omega_i}^0 T_i(\mu, 0, s) \hat{P}_i^s(\mu, s) \hat{g}^s(s) ds \\ &= b^u + \hat{v}^s(0) \\ v(0) &= b^s + T_i(\mu, 0, \omega_{i+1}) P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1}) a^u + \int_{\omega_{i+1}}^0 T_i(\mu, 0, s) P_{i+1}^u(\mu, s) g^u(s) ds \\ &= b^s + v^u(0). \end{aligned}$$

Dann ist (S) äquivalent zu folgenden Gleichungen:

$$(3.23) \quad \begin{cases} P(\text{span } \dot{q}_i(0), Z_i \oplus Y_i) (b^u + \hat{v}^s(0)) & = 0 \\ P(\text{span } \dot{q}_i(0), Z_i \oplus Y_i) (b^s + v^u(0)) & = 0 \\ P(Y_i, \text{span } \dot{q}_i(0) \oplus Z_i) (b^u - b^s + v^u(0) - \hat{v}^s(0)) & = 0 \end{cases}$$

Aufgrund von Lemma 3.6 gilt  $\mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0) = \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, 0)$  und  $\mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0) = \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu, 0)$ . Daher müssen wir diese Gleichungen für  $(b^s, b^u) \in \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu_0, 0) \times \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu_0, 0)$  lösen. Dies verläuft ebenso wie in Lemma 3.2 und wir erhalten daher Lösungen  $B_i^2(v^u(0), \hat{v}^s(0))$  für  $|\mu - \mu_0|$  hinreichend klein. Außerdem ist  $B_i^2(v^u(0), \hat{v}^s(0))$  linear in  $(v^u(0), \hat{v}^s(0))$ , wobei die Norm von  $B_i^2$  unabhängig von  $i$ ,  $\mu$  und  $\omega$  ist.

Wir müssen schließlich noch die Abbildungseigenschaften zeigen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} |v^u(t)| &\leq |T_i(\mu, t, \omega_{i+1}) P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1})| |a^u| + \int_t^{\omega_{i+1}} |T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^u(\mu, s)| |g^u(s)| ds \\ &\leq K e^{-(\alpha_{i+1}^u + \gamma)(\omega_{i+1} - t)} |a^u| + \int_t^{\omega_{i+1}} K e^{-(\alpha_{i+1}^u + \gamma)(s-t)} e^{-\alpha_{i+1}^u(\omega_{i+1} - s)} \|g^u\|_f ds \\ &\leq K e^{-\alpha_{i+1}^u(\omega_{i+1} - t)} \left( |a^u| + \|g^u\|_f \cdot \int_t^{\omega_{i+1}} e^{-\gamma(s-t)} ds \right) \\ &\leq K e^{-\alpha_{i+1}^u(\omega_{i+1} - t)} (|a^u| + C \|g^u\|_f). \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man

$$|\hat{v}^s(t)| \leq K e^{-(\alpha_i^s)(\omega_i + t)} (|a^s| + C \|\hat{g}^s\|_f).$$

Damit folgt bereits, daß die Abbildungen  $B_i^2(a, g^u, \hat{g}^s)$  stetig in  $(g^u, \hat{g}^s) \in V_{f, \alpha_{i+1}^u}(\omega_{i+1}) \times \hat{V}_{f, \alpha_i^s}(\omega_i)$  sind. Deshalb und wegen  $b^s \in \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, 0)$  gilt weiterhin

$$\begin{aligned} |v^s(t)| &\leq |T_i(\mu, t, 0) b^s| + \int_0^t |T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^s(\mu, s)| |g^s(s)| ds \\ &\leq K e^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)t} |b^s| + \int_0^t K e^{-(\alpha_{i+1}^s + \gamma)(t-s)} e^{-\alpha_{i+1}^s s} \|g^s\|_l ds \\ &\leq K e^{-\alpha_{i+1}^s t} (|b^s| + \|g^s\|_l \cdot \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} ds) \\ &\leq KC e^{-\alpha_{i+1}^s t} (e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|a^u| + \|g^u\|_f) + e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|a^s| + \|\hat{g}^s\|_f) + \|g^s\|_l). \end{aligned}$$

Wieder zeigt man analog

$$|\hat{v}^u(t)| \leq KC e^{\alpha_i^u t} (e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|a^s| + \|\hat{g}^s\|_f) + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|a^u| + \|g^u\|_f) + \|\hat{g}^u\|_l).$$

Damit haben wir insgesamt folgende Abschätzungen gezeigt

$$(3.24) \left\{ \begin{array}{l} \|v^u\|_{f, \alpha_{i+1}^u} \leq C (|a^u| + \|g^u\|_f) \\ \|v^s\|_{l, \alpha_{i+1}^s} \leq C (e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|a^u| + \|g^u\|_f) + e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|a^s| + \|\hat{g}^s\|_f) + \|g^s\|_l) \\ \|\hat{v}^s\|_{f, \alpha_i^s} \leq C (|a^s| + \|\hat{g}^s\|_f) \\ \|\hat{v}^u\|_{l, \alpha_i^u} \leq C (e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|a^s| + \|\hat{g}^s\|_f) + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|a^u| + \|g^u\|_f) + \|\hat{g}^u\|_l), \end{array} \right.$$

woraus die behaupteten Abbildungseigenschaften folgen. Auf die gleiche Art und Weise zeigt man dieselben Ungleichungen für die Ableitungen von  $(v, \hat{v})$  nach  $\mu$ .  $\square$

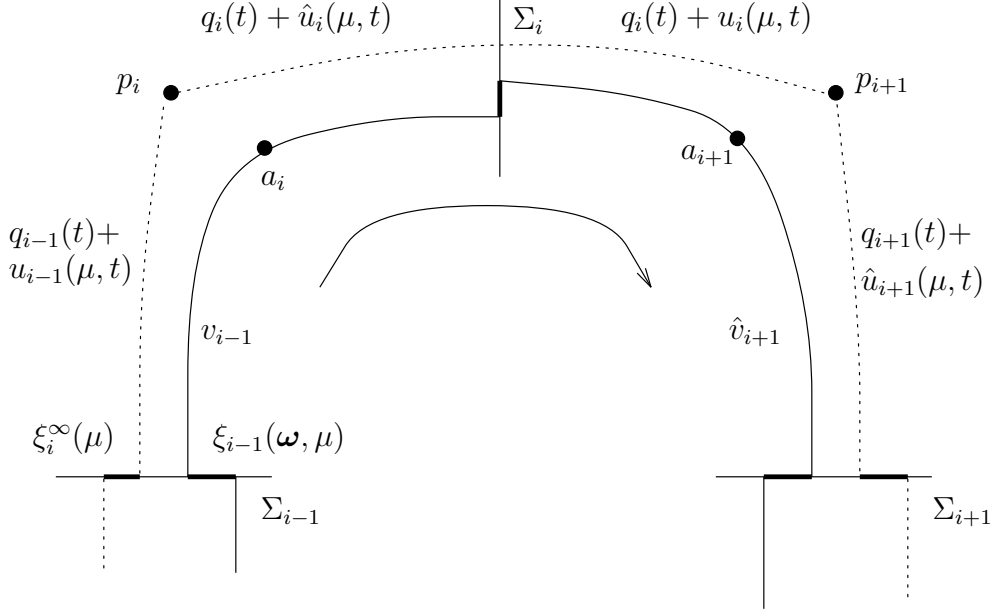


Abbildung 14: Notation

**Bemerkung 3.8** Den Sprung in  $Z_i$ -Richtung können wir diesmal darstellen als

$$\xi_i(\omega, \mu) = \left\langle \Psi_i(\mu, -\omega_i), \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a_i^s \right\rangle - \left\langle \Psi_i(\mu, \omega_{i+1}), P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1}) a_{i+1}^u \right\rangle + \int_{-\omega_i}^0 \left\langle \Psi_i(\mu, t), \hat{g}^s(t) \right\rangle ds + \int_0^{\omega_{i+1}} \left\langle \Psi_i(\mu, t), g^u(t) \right\rangle ds.$$

**Beweis.** Wir wenden wieder  $\langle \Psi_i(\mu_0, 0), \cdot \rangle$  auf den Sprung  $\hat{v}(0) - v(0)$  an. Anschließend bringen wir den adjungierten Halbfluß auf die andere Seite des Skalarprodukts und aus der Unabhängigkeit der Projektionen für  $t = 0$  von  $\mu$ , die in Lemma 3.6 gezeigt wurde, folgt dann bereits die Behauptung.  $\square$

In Lemma 3.7 entkoppelten die linearisierten Randbedingungen (R1). Wir werden im nächsten Lemma diese Randbedingungen koppeln. Einen Überblick über die verwendeten Indizes und ihre Bedeutung verschafft Abbildung 14.

**Lemma 3.9** Es sei  $\Omega > 0$  hinreichend groß und  $\omega = (\omega_i)$  eine Familie reeller Zahlen mit  $\omega_i \geq \Omega$ . Ferner seien Vektoren  $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  mit  $d_i \in \mathbb{R}^n$  und  $\sup_{i \in \mathbb{Z}} |d_i| < \infty$  sowie eine Familie  $(\mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}) \in \mathcal{V} \times \hat{\mathcal{V}}$  gegeben. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Familie von Elementen

$$(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{L}^3(\mu, \mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}) \in \mathcal{V} \times \hat{\mathcal{V}},$$

die die Integralgleichung (3.21) lösen und die Randbedingung

$$(R2) \quad v_{i-1}(\omega_i) - \hat{v}_i(-\omega_i) = d_i$$



sowie die Bedingungen (N) und (S) aus Lemma 3.7 für alle  $i \in \mathbb{Z}$  erfüllen.  $L^3$  ist linear in  $(\mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}})$  mit Norm unabhängig von  $\omega$  und  $\mu$ , und  $L^3 \in C^{k+2}$  ist differenzierbar bezüglich  $\mu$ .

**Beweis.** Wir verwenden im folgenden die Zerlegung  $a_i = (a_i^s, a_i^u) \in \mathbb{R}P_i^s \times \mathbb{R}P_i^u$  und analog für  $d_i$ .

Aufgrund von Lemma 3.7 ist die Behauptung über die Existenz der Familie  $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}})$  äquivalent zu folgendem Problem:

$$(R3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Finde eine beschränkte Familie } \mathbf{a} = (a_i), \text{ so daß für } (v_i, \hat{v}_i) := L_i^2(\mu, \mathbf{a}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}) \text{ gilt:} \\ d_i = P_i^u(\mu, \omega_i) a_i^u + P_i^s(\mu, \omega_i) v_{i-1}(\omega_i) - \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a_i^s - \hat{P}_i^u(\mu, -\omega_i) v_i(-\omega_i). \end{array} \right.$$

Wir wählen nun  $\Omega$  zunächst wie in (3.15). Dann gilt

$$P_i^s = P \left( \mathbb{R}P_i^s(\mu, t), \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu, -\tilde{t}) \right)$$

für alle  $\mu \in M$  und  $t, \tilde{t} \geq \Omega$ . Nun wenden wir die Projektionen  $P_i^s$  und  $P_i^u$  auf Gleichung (R3) an und erhalten

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a_i^s &= -d_i^s + P_i^s(\mu, \omega_i) v_{i-1}(\omega_i) + P_i^s P_i^u(\mu, \omega_i) a_i^u + P_i^u \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a_i^s \\ P_i^u(\mu, \omega_i) a_i^u &= d_i^u + \hat{P}_i^u(\mu, -\omega_i) \hat{v}_i(-\omega_i) + P_i^u \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a_i^s + P_i^s P_i^u(\mu, \omega_i) a_i^u \end{aligned}$$

unter Beachtung der obenstehenden Identität für die Projektionen. Die rechte Seite dieser Gleichung ist linear in  $(\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}})$  und differenzierbar in  $\mu$  nach Lemma 3.7; wir hatten ja  $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) = (L_i^2(\mu, \mathbf{a}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}))$  eingesetzt. Wir erhalten dann folgendes Fixpunktproblem

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i^s = -d_i^s + P_i^s(\mu, \omega_i) v_{i-1}(\omega_i) + P_i^s P_i^u(\mu, \omega_i) a_i^u + \\ \quad \left( P_i^u \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) + \hat{P}_i^u(\mu, -\omega_i) P_i^s \right) a_i^s \\ =: D_i^s(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}) \\ a_i^u = d_i^u + \hat{P}_i^u(\mu, -\omega_i) \hat{v}_i(-\omega_i) + P_i^u \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a_i^s + \\ \quad \left( P_i^s P_i^u(\mu, \omega_i) + P_i^s(\mu, \omega_i) P_i^u \right) a_i^u \\ =: D_i^u(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}). \end{array} \right.$$

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir die Abbildungen  $D_i = (D_i^s, D_i^u)$  abschätzen. Wir beachten, daß diese Operatoren linear in allen Variablen (ausgenommen  $\mu$ ) sind. Da die Eigenräume der Linearisierungen in den Gleichgewichten nicht von den Parametern  $\mu$  abhängen, ist die Voraussetzung von Lemma 1.1(ii) erfüllt und wir erhalten schließlich die folgenden Abschätzungen für die Normen der verketteten Projektionen.

$$\begin{aligned} |P_i^u \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i)|, |\hat{P}_i^u(\mu, -\omega_i) P_i^s| &\leq C e^{-\alpha_i^u \omega_i} \\ |P_i^s P_i^u(\mu, \omega_i)|, |P_i^s(\mu, \omega_i) P_i^u| &\leq C e^{-\alpha_i^s \omega_i}. \end{aligned}$$

Außerdem können wir die Terme  $P_i^s(\mu, \omega_i) v_{i-1}(\omega_i) = v_{i-1}^s(\omega_i)$  und  $\hat{P}_i^u(\mu, -\omega_i) \hat{v}_i(-\omega_i) = \hat{v}_i^u(-\omega_i)$  aufgrund von (3.24) folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned} |v_{i-1}^s(\omega_i)| &\leq C (e^{-\alpha_i^s \omega_i} |\mathbf{a}| + |\mathbf{g}| + |\hat{\mathbf{g}}|) \\ |\hat{v}_i^u(-\omega_i)| &\leq C (e^{-\alpha_i^u \omega_i} |\mathbf{a}| + |\mathbf{g}| + |\hat{\mathbf{g}}|). \end{aligned}$$

Deshalb ist die Abbildung  $(D_i)$  eine Kontraktion in  $\mathbf{a}$  gleichmäßig in den anderen Variablen

$$|D_i(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}})| \leq C \left( (e^{-\alpha_i^s \omega_i} + e^{-\alpha_i^u \omega_i}) |\mathbf{a}| + |\mathbf{g}| + |\hat{\mathbf{g}}| + |\mathbf{d}| \right).$$

Wie erwähnt ist die Abbildung  $\mathbf{D} = (D_i)$  linear in  $\mathbf{a}$  und deshalb für  $\Omega$  groß genug in Abhängigkeit von der Konstanten  $C$ , die unabhängig von  $\Omega$  ist, eine Kontraktion in der Variablen  $\mathbf{a}$  gleichmäßig in den anderen Variablen. Außerdem ist  $\mathbf{D} \in C^{k+2}$  in  $\mu$  wegen Lemma 3.7. Daher existiert eine eindeutige Lösung  $\mathbf{a}_*$  der Fixpunktgleichung (3.26), die linear in  $(\mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}})$  und  $C^{k+2}$  in  $\mu$  ist. Wie oben bemerkt erfüllt dann

$$(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{L}^3(\mu, \mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}) := \left( L_i^2(\mu, D_i(\mu, \mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}), \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}) \right)$$

die Behauptung des Lemmas. □

Damit sind die Vorbereitungen zum Existenzbeweis von Lösungen von (3.19) weitgehend abgeschlossen. Wir müssen nur noch dafür Sorge tragen, daß die Nichtlinearitäten  $g_i$  tatsächlich die normierten Räume  $V_i \times \hat{V}_i$  in sich abbilden. Im allgemeinen wird das nicht der Fall sein, erst eine geeignete Koordinatentransformation wird diese Abbildungseigenschaften ermöglichen. Dazu parametrisieren wir die globalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten in der Nähe der heteroklinen Verbindungen  $q_i(t)$  über den stabilen und instabilen Bündeln. Es gilt folgendes Lemma.

**Lemma 3.10** *Betrachte die Differentialgleichung (3.18)*

$$\dot{v} + A_i(\mu, t)v = g_i(t, v, \mu).$$

Dann existieren  $C^{k+2}$ -Abbildungen

$$\begin{aligned} h_{i+1}^s(t, v, \mu) &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, t) \longrightarrow \mathbb{R}P_{i+1}^u(\mu, t) \\ \hat{h}_i^u(t, v, \mu) &: \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu, t) \longrightarrow \mathbb{R}\hat{P}_i^s(\mu, t), \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} v + h_{i+1}^s(t, v, \mu) &\in W^s(\mu, p_{i+1}) && \text{für } v \in \mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, t) \\ \hat{v} + \hat{h}_i^u(t, \hat{v}, \mu) &\in W^u(\mu, p_i) && \text{für } \hat{v} \in \mathbb{R}\hat{P}_i^u(\mu, t), \end{aligned}$$

sowie

$$h_{i+1}^s(t, v, \mu) = O(|v|^2), \quad \hat{h}_i^u(t, \hat{v}, \mu) = O(|\hat{v}|^2).$$

Außerdem verschwinden  $h_{i+1}^s(t, v, \mu)$  und  $\hat{h}_i^u(t, \hat{v}, \mu)$  identisch für  $t = 0$  und  $t \geq \Omega$  beziehungsweise  $t \leq -\Omega$ .

**Beweis.** Wir beschränken uns auf die Parametrisierung der stabilen Mannigfaltigkeit. Zunächst sind die durch  $\mathbb{R}P_{i+1}^s(\mu, t)$  und  $\mathbb{R}P_{i+1}^u(\mu, t)$  über der Basis  $\{q_i(t) / t \geq 0\}$  gebildeten Bündel in  $C^{k+2}$ , denn die Projektionen sind  $C^{k+2}$  in  $t$ . Wir projizieren die zu

(3.18) gehörende Integralgleichung in diese Bündel und wenden anschließend ein Kontraktionsargument auf die so entstandenen Integralgleichungen an. Die entscheidende Eigenschaft ist hier das Vorhandensein der exponentiellen Dichotomien. Auf die Details sei verzichtet, vergleiche zum Beispiel [23, exc. 7.6.21]. Wir erhalten dann eine Abbildung  $h_i^s(t, \cdot, \mu)$ , die die zeitunabhängige globale stabile Mannigfaltigkeit parametrisiert. Da die Bündel, über denen parametrisiert wird,  $C^{k+2}$  in  $t$  sind, gilt dies auch für die Abbildungen  $h^s$  und  $h^u$ . Die letzten beiden Eigenschaften von  $h^s$  folgen einerseits aus der Darstellung  $RP_{i+1}^s(\mu, t) = T_{q_i(t)+u_i(\mu, t)} W^s(\mu, p_{i+1})$  des Tangentialraums der stabilen Mannigfaltigkeit und andererseits aus der Koordinatenwahl in der Nähe der Gleichgewichte sowie aus Lemma 3.6.  $\square$

Wir führen jetzt eine zeitabhängige Koordinatentransformation ein, so daß die globalen stabilen Mannigfaltigkeiten für  $t \geq 0$  und die globalen instabilen Mannigfaltigkeiten für  $t \leq 0$  lokal durch die linearen Bündel  $P_i^s(\mu, t)$  und  $\hat{P}_i^u(\mu, t)$  gegeben sind. Die neuen Variablen bezeichnen wir mit  $w_i = (w_i^s, w_i^u)$  für  $t \geq 0$  und mit  $\hat{w}_i = (\hat{w}_i^s, \hat{w}_i^u)$  für  $t \leq 0$ .

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (w_i^s, w_i^u) & = H_i(t, v_i, \mu) \\ & := \left( v_i^s, v_i^u - h_i^s(t, v_i^s, \mu) \right) \quad \text{für } (v_i^s, v_i^u) \in RP_{i+1}^s(\mu, t) \times RP_{i+1}^u(\mu, t) \\ (\hat{w}_i^s, \hat{w}_i^u) & = \hat{H}_i(t, \hat{v}_i, \mu) \\ & := \left( \hat{v}_i^s - \hat{h}_i^u(t, \hat{v}_i^u, \mu), \hat{v}_i^u \right) \quad \text{für } (\hat{v}_i^s, \hat{v}_i^u) \in R\hat{P}_i^u(\mu, t) \times R\hat{P}_i^s(\mu, t). \end{array} \right.$$

Die Abbildungen  $H_i$  und  $\hat{H}_i$  sind lokal um den Nullpunkt invertierbar.

**Bemerkung 3.11** *Es gilt  $H_i(0, \cdot, \mu) = \hat{H}_i(0, \cdot, \mu) = id$ , sowie  $H_i(t, \cdot, \mu) = id$  für  $t \geq \Omega$  und  $\hat{H}_i(t, \cdot, \mu) = id$  für  $t \leq -\Omega$ .*

**Beweis.** Dies folgt unmittelbar aus den Eigenschaften von  $h_i^s$  und  $\hat{h}_i^u$  aus Lemma 3.10.  $\square$

**Bemerkung 3.12** *Statt die Transformation (3.27) zu benutzen, können wir auch direkt die gesamte stabile (oder instabile) Mannigfaltigkeit in der Nähe der Lösung  $q(t)$  für  $0 \leq t \leq \Omega$  diffeomorph auf den Raum  $RP_i^s(\mu_0, 0)$  abbilden. Anschließend rechnen wir dann in verschiedenen Koordinatensystemen genau wie unten weiter. Dies führt letztendlich zu demselben Ergebnis, wir müssen aber ständig die Koordinaten wechseln.*

Wir schreiben die Differentialgleichung (3.18) für positive und negative Zeiten in den neuen Variablen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w_i + A_i(t) w_i &= g_i(t, w_i, \mu) & t \geq 0 \\ \frac{d}{dt} \hat{w}_i + A_i(t) \hat{w}_i &= \hat{g}_i(t, \hat{w}_i, \mu) & t \leq 0. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen hier die neue Nichtlinearität wieder mit  $g_i$ . Aus den Argumenten der Funktion wird stets hervorgehen, welche Abbildung gemeint ist.

**Lemma 3.13** Die Nichtlinearität  $g_i(t, w_i, \mu) \in C^{k+1}$  hat die folgenden Eigenschaften.

$$\begin{aligned} g_i^s(t, w^s, w^u, \mu) &= O\left((|q(t) + u_i(\mu, t)| |w^u| + |w^s|) (|w^s| + |w^u|)\right) \\ g_i^u(t, w^s, w^u, \mu) &= O\left(|w^u| (|w^s| + |w^u|)\right). \end{aligned}$$

Außerdem besitzt der zugehörige Nemitskii-Operator  $G_i = (G_i^s, G_i^u)$  die folgenden Abbildungseigenschaften

$$G_i : M \times V_i \rightarrow V_i \quad \in C^k.$$

Ein analoges Resultat gilt für  $\hat{G}_i$ .

**Beweis.** Wir überzeugen uns leicht, daß die Nichtlinearität die folgende Gestalt hat.

$$\begin{aligned} g_i(t, w_i, \mu) &= A_i(t) h_i(t, w_i^s, \mu) + g_i(t, H_i^{-1}(t, w_i, \mu), \mu) - \frac{\partial}{\partial t} h_i(t, H_i(t, w_i, \mu), \mu) - \\ &\quad D_x h_i(t, w_i^s, \mu) (A_i(t) H_i^{-1}(t, w_i, \mu) + g_i(t, H_i^{-1}(t, w_i, \mu), \mu)). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar  $g_i = O(|w_i|^2)$  und  $\hat{g}_i = O(|\hat{w}_i|^2)$  gleichmäßig in  $(t, \mu)$ . Da die Koordinatentransformation in  $C^{k+2}$  war, sind die Funktionen  $g_i$  und  $\hat{g}_i$  in  $C^{k+1}$ . Wir zeigen als nächstes die Abschätzungen für  $g_i^u$  und  $g_i^s$ . Die Behauptung über  $g_i^u$  folgt sofort aus der Invarianz der stabilen Mannigfaltigkeit. Weiter gilt für  $t \geq \Omega$ , d.h. für  $q_i(t) + u_i(\mu, t) \in W_{loc}^s(\mu, p_{i+1})$ , die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|g_i^s(t, w^s, w^u, \mu)| \\ &\leq \int_0^1 \left| D_{w^s} f^s(q_i(t) + u_i(\mu, t) + \tau w^s, \tau w^u, \mu) - D_{w^s} f^s(q_i(t) + u_i(\mu, t), 0, \mu) \right| d\tau |w^s| + \\ &\quad \int_0^1 \left| D_{w^u} f^s(q_i(t) + u_i(\mu, t) + \tau w^s, \tau w^u, \mu) - D_{w^u} f^s(q_i(t) + u_i(\mu, t), 0, \mu) \right| d\tau |w^u| \\ &\leq C |w^s| (|w^s| + |w^u|) + \\ &\quad \left( \int_0^1 \int_0^1 \left| D_{w^s} D_{w^u} f^s(q_i(t) + u_i(\mu, t) + \tau_1 \tau_2 w^s, \tau_1 \tau_2 w^u, \mu) \right| d\tau_1 d\tau_2 |w^s| + \right. \\ &\quad \left. \int_0^1 \int_0^1 \left| D_{w^u}^2 f^s(q_i(t) + u_i(\mu, t) + \tau_1 \tau_2 w^s, \tau_1 \tau_2 w^u, \mu) \right| d\tau_1 d\tau_2 |w^u| \right) |w^u| \\ &\leq C |w^s| (|w^s| + |w^u|) + C (|w^s| + |q_i(t) + u_i(\mu, t)|) |w^u|^2 \\ &\leq C (|w^s| + |q_i(t) + u_i(\mu, t)| |w^u|) (|w^s| + |w^u|). \end{aligned}$$

Dabei beachten wir, daß  $f^s(0, w^u) \equiv 0$  verschwindet. Es bleiben die Behauptungen über den Nemitskii-Operator zu zeigen.

Im folgenden werden wir den Index  $i$  weglassen. Wir betrachten zuerst  $G^u$  und beginnen mit der Differenzierbarkeit nach  $w^s$ .

$$\begin{aligned} &\|G^u(w^s + h, w^u, \mu) - G^u(w^s, w^u, \mu) - D_{w^s} g^u(\cdot, w^s, w^u, \mu) h\| \frac{1}{\|h\|} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \left| g^u(t, w^s + h, w^u, \mu) - g^u(t, w^s, w^u, \mu) - D_{w^s} g^u(t, w^s, w^u, \mu) h \right| e^{\alpha u(\omega-t)} \frac{1}{\|h\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \geq 0} e^{\alpha^u(\omega-t)} \int_0^1 \left| D_{w^s} g^u(t, w^s + \tau_1 h, w^u, \mu) - D_{w^s} g^u(t, w^s, w^u, \mu) \right| d\tau_1 \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \sup_{\tau_1 \in [0,1]} \int_0^1 \left| D_{w^u} D_{w^s} g^u(t, w^s + \tau_1 h, \tau_2 w^u, \mu) - D_{w^u} D_{w^s} g^u(t, w^s, \tau_2 w^u, \mu) \right| d\tau_2 \|w^u\| \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

für  $\|h\| \rightarrow 0$ . Als nächstes zeigen wir die Differenzierbarkeit nach  $w^u$ .

$$\begin{aligned}
&\|G^u(w^s, w^u + h, \mu) - G^u(w^s, w^u, \mu) - D_{w^u} g^u(\cdot, w^s, w^u, \mu) h\| \frac{1}{\|h\|} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \left| g^u(t, w^s, w^u + h, \mu) - g^u(t, w^s, w^u, \mu) - D_{w^u} g^u(t, w^s, w^u, \mu) h \right| e^{\alpha^u(\omega-t)} \frac{1}{\|h\|} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \int_0^1 \left| D_{w^u} g^u(t, w^s, w^u + \tau h, \mu) - D_{w^u} g^u(t, w^s, w^u, \mu) \right| d\tau \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \sup_{\tau \in [0,1]} \left| D_{w^u} g^u(t, w^s, w^u + \tau h, \mu) - D_{w^u} g^u(t, w^s, w^u, \mu) \right| \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

für  $\|h\| \rightarrow 0$ . Schließlich benötigen wir die Differenzierbarkeit in  $\mu$ .

$$\begin{aligned}
&\|G^u(w^s, w^u, \mu + h) - G^u(w^s, w^u, \mu) - D_{\mu} g^u(\cdot, w^s, w^u, \mu) h\| \frac{1}{\|h\|} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \left| g^u(t, w^s, w^u, \mu + h) - g^u(t, w^s, w^u, \mu) - D_{\mu} g^u(t, w^s, w^u, \mu) h \right| e^{\alpha^u(\omega-t)} \frac{1}{\|h\|} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} e^{\alpha^u(\omega-t)} \int_0^1 \left| D_{\mu} g^u(t, w^s, w^u, \mu + \tau_1 h) - D_{\mu} g^u(t, w^s, w^u, \mu) \right| d\tau_1 \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \sup_{\tau_1 \in [0,1]} e^{\alpha^u(\omega-t)} . \\
&\int_0^1 \left| D_{w^u} D_{\mu} g^u(t, w^s, \tau_2 w^u, \mu + \tau_1 h) - D_{w^u} D_{\mu} g^u(t, w^s, \tau_2 w^u, \mu) \right| d\tau_2 \|w^u\| \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

für  $\|h\| \rightarrow 0$ .

Es bleibt die Differenzierbarkeit von  $G^s$  zu zeigen. Wir beginnen mit der Differenzierbarkeit nach  $w^s$ .

$$\begin{aligned}
&\|G^s(w^s + h, w^u, \mu) - G^s(w^s, w^u, \mu) - D_{w^s} g^s(\cdot, w^s, w^u, \mu) h\| \frac{1}{\|h\|} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \left| g^s(t, w^s + h, w^u, \mu) - g^s(t, w^s, w^u, \mu) - D_{w^s} g^s(t, w^s, w^u, \mu) h \right| e^{\alpha^s t} \frac{1}{\|h\|} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \int_0^1 \left| D_{w^s} g^s(t, w^s + \tau h, w^u, \mu) - D_{w^s} g^s(t, w^s, w^u, \mu) \right| d\tau \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \sup_{\tau \in [0,1]} \left| D_{w^s} g^s(t, w^s + \tau h, w^u, \mu) - D_{w^s} g^s(t, w^s, w^u, \mu) \right| \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

für  $\|h\| \rightarrow 0$ . Weiterhin folgt die Differenzierbarkeit nach  $w^u$ .

$$\begin{aligned}
& \|G^s(w^s, w^u, \mu) - G^s(w^s, w^u, \mu) - D_{w^u}g^s(\cdot, w^s, w^u, \mu)h\| \frac{1}{\|h\|} \\
& \leq \sup_{t \geq 0} \left| g^s(t, w^s, w^u + h, \mu) - g^s(t, w^s, w^u, \mu) - D_{w^u}g^s(t, w^s, w^u, \mu)h \right| e^{\alpha^s t} \frac{1}{\|h\|} \\
& \leq \sup_{t \geq 0} e^{\alpha^s t} \int_0^1 \left| D_{w^u}g^s(t, w^s, w^u + \tau_1 h, \mu) - D_{w^u}g^s(t, w^s, w^u, \mu) \right| d\tau_1 \\
& \leq \sup_{t \in [0, \Omega]} \sup_{\tau_1 \in [0, 1]} e^{\alpha^s \Omega} \left| D_{w^u}g^s(t, w^s, w^u + \tau_1 h, \mu) - D_{w^u}g^s(t, w^s, w^u, \mu) \right| + \\
& \quad \sup_{t \geq \Omega} \sup_{\tau_1 \in [0, 1]} e^{\alpha^s t} \left| D_{w^u}f\left(q(t) + u(\mu, t) + w^s + w^u + \tau_1 h, \mu\right) - \right. \\
& \quad \left. D_{w^u}f\left(q(t) + u(\mu, t) + w^s + w^u, \mu\right) \right|.
\end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert gegen Null für  $h \rightarrow 0$ , wir untersuchen also noch den zweiten Term.

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \geq \Omega} \sup_{\tau_1 \in [0, 1]} e^{\alpha^s t} \left| D_{w^u}f\left(q(t) + u(\mu, t) + w^s + w^u + \tau_1 h, \mu\right) - \right. \\
& \quad \left. D_{w^u}f\left(q(t) + u(\mu, t) + w^s + w^u, \mu\right) \right| \\
& \leq \sup_{t \geq \Omega} \sup_{\tau_1 \in [0, 1]} e^{\alpha^s t} \int_0^1 \left| D_{w^s}D_{w^u}f\left(\tau_2(q(t) + u(\mu, t) + w^s) + w^u + \tau_1 h, \mu\right) - \right. \\
& \quad \left. D_{w^s}D_{w^u}f\left(\tau_2(q(t) + u(\mu, t) + w^s) + w^u, \mu\right) \right| d\tau_2 |q(t) + u(\mu, t) + w^s(t)| \\
& \leq \sup_{t \geq \Omega} \sup_{\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]} \left| D_{w^s}D_{w^u}f\left(\tau_1(q(t) + u(\mu, t) + w^s) + w^u + \tau_2 h, \mu\right) - \right. \\
& \quad \left. D_{w^s}D_{w^u}f\left(\tau_2(q(t) + u(\mu, t) + w^s) + w^u, \mu\right) \right| \|q(\cdot) + u(\mu, \cdot) + w^s\| \\
& \rightarrow 0
\end{aligned}$$

für  $\|h\| \rightarrow 0$ . Damit ist die Differenzierbarkeit nach  $w^u$  gezeigt. Die Differenzierbarkeit nach  $\mu$  folgt analog. Die Existenz der höheren Ableitungen zeigt man auf ähnliche Art und Weise.  $\square$

**Bemerkung 3.14** *Es gelten die folgenden Abschätzungen für die Nemitskii-Operatoren  $G_i$  in den Räumen  $V_i$*

$$\begin{aligned}
\|G_i^u(w^s, w^u)\| & \leq C \|w^u\| (|w^s| + |w^u|) \\
\|G_i^s(w^s, w^u)\| & \leq C \left( \|w^s\| + \|q_i + u_i(\mu)\| |w^u| \right) (|w^s| + |w^u|),
\end{aligned}$$

sowie für die Ableitungen nach  $(w^s, w^u)$

$$\begin{aligned}
\|D_{w^u}G_i^u(w^s, w^u)\| & \leq C (|w^s| + |w^u|) & \|D_{w^u}G_i^s(w^s, w^u)\| & \leq C (\|w^s\| + |w^u|) \\
\|D_{w^s}G_i^u(w^s, w^u)\| & \leq C \|w^u\| & \|D_{w^s}G_i^s(w^s, w^u)\| & \leq C (|w^s| + |w^u|),
\end{aligned}$$

und zuletzt für die Ableitungen nach den Parametern

$$\begin{aligned}\|D_\mu G_i^u(w^s, w^u)\| &\leq C \|w^u\| (|w^s| + |w^u|) \\ \|D_\mu G_i^s(w^s, w^u)\| &\leq C (\|w^s\| + |w^u|) (|w^s| + |w^u|).\end{aligned}$$

Analoge Abschätzungen gelten für  $\hat{G}_i$ .

**Beweis.** Dies folgt leicht aus den Abschätzungen für  $g_i^s$  und  $g_i^u$  aus Lemma 3.13 und den ebenfalls dort gezeigten Formeln für die Ableitungen der Nemitskii-Operatoren.  $\square$

**Bemerkung 3.15** *Es ist  $(v_i, \hat{v}_i)$  eine Lösung von (3.18) und (3.19) dann und nur dann, wenn  $(w_i, \hat{w}_i) = (H_i(v_i, \mu), \hat{H}_i(\hat{v}_i, \mu))$  die folgende Fixpunktgleichung löst*

$$(3.28) \quad (w_i, \hat{w}_i) = L_i^3\left(\mu, (d(\mu, \omega_j)), (g_j(\cdot, w_j, \mu)), (\hat{g}_j(\cdot, \hat{w}_j, \mu))\right)$$

oder äquivalent

$$(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \mathbf{L}^3\left(\mu, \mathbf{d}(\boldsymbol{\omega}, \mu), \mathbf{G}(\mathbf{w}, \mu), \hat{\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{w}}, \mu)\right).$$

**Beweis.** Zunächst ist  $(v_i, \hat{v}_i)$  eine Lösung von (3.18) und (3.19), wenn  $(w_i, \hat{w}_i)$  die entsprechenden transformierten Gleichungen löst. Tatsächlich transformieren sich die Gleichungen (3.19) identisch, denn die Koordinatentransformationen sind die Identität für  $t = 0$  und  $t \geq \Omega$  beziehungsweise  $t \leq -\Omega$ . Daher müssen wir nur die Differentialgleichung (3.18) in den neuen Koordinaten lösen. Die zugehörigen Integralgleichungen - projiziert in stabile und instabile Unterräume - haben wieder die Gestalt

$$(3.29) \quad \begin{cases} w_i^s(t) = T_i(\mu, t, 0) b_i^s + \int_0^t T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^s(\mu, s) g_i^s(s, w_i^s, w_i^u, \mu) ds \\ w_i^u(t) = T_i(\mu, t, \omega_{i+1}) P_{i+1}^u(\mu, \omega_{i+1}) a_{i+1}^u + \\ \quad \int_{\omega_{i+1}}^t T_i(\mu, t, s) P_{i+1}^u(\mu, s) g_i^u(s, w_i^s, w_i^u, \mu) ds \\ \hat{w}_i^s(t) = T_i(\mu, t, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\mu, -\omega_i) a_i^s + \\ \quad \int_{-\omega_i}^t T_i(\mu, t, s) \hat{P}_i^s(\mu, s) \hat{g}_i^s(s, \hat{w}_i^s, \hat{w}_i^u, \mu) ds \\ \hat{w}_i^u(t) = T_i(\mu, t, 0) b_i^u + \int_0^t T_i(\mu, t, s) \hat{P}_i^u(\mu, s) \hat{g}_i^u(s, \hat{w}_i^s, \hat{w}_i^u, \mu) ds. \end{cases}$$

Daher folgt die Behauptung aus Lemma 3.9.  $\square$

Wir müssen also die Fixpunktgleichung (3.28) lösen.

**Lemma 3.16** *Es existieren Konstanten  $\Omega > 0$ ,  $\delta_0 > 0$  und  $\epsilon_0 > 0$  mit der folgenden Eigenschaft. Für jede Familie  $\boldsymbol{\omega}$  mit  $\omega_i \geq \Omega$  existiert eine eindeutig bestimmte Familie*

$$L_i^4(\boldsymbol{\omega}, \mu) = (w_i, \hat{w}_i) \in V_i$$

für  $|\mu - \mu_0| \leq \delta_0$  in der Menge  $\{(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) / \|(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}})\|_0 \leq \epsilon_0\}$ , die die Fixpunktgleichung (3.28) löst.  $L_i^4 \in C^k$  ist  $k$ -mal differenzierbar bezüglich  $\mu \in M$  für festes  $\boldsymbol{\omega}$ .

**Beweis.** Wir wollen den Satz über implizite Funktionen auf die Fixpunktgleichung (3.28)

$$(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \mathbf{L}^3\left(\mu, \mathbf{d}(\boldsymbol{\omega}, \mu), \mathbf{G}(\mathbf{w}, \mu), \hat{G}(\hat{\mathbf{w}}, \mu)\right).$$

anwenden. Dabei wurde  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega}, \mu) = (d_j(\mu, \boldsymbol{\omega}))$  in (3.17) definiert. Zunächst ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : M \times \mathcal{V} \times \hat{\mathcal{V}} &\longrightarrow \mathcal{V} \times \hat{\mathcal{V}} \\ (\mu, \mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) &\longmapsto (G_j(w_j, \mu), \hat{G}_j(\hat{w}_j, \mu)) \end{aligned}$$

in  $C^k$  in der Supremumsnorm, denn die Abschätzungen in Lemma 3.13 gelten gleichmäßig in  $i$ , da nur  $N$  verschiedene Funktionen  $g_i$  und  $\hat{g}_i$  vorkommen. Hier ist  $N$  die Anzahl der heteroklinen Lösungen. Aus Bemerkung 3.14 folgt, daß die Ableitung von  $\mathbf{G}$  durch  $D_{(w, \hat{w})}\mathbf{G} = (D_{w_j}G_j, D_{\hat{w}_j}\hat{G}_j)$  gegeben ist und daß die Gleichung

$$|D_{(w, \hat{w})}\mathbf{G}(\mu_0, 0)| = 0$$

gilt. Nach Definition ist  $d_j \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$  mit gleichmäßigen Schranken in  $j$ . Aus der Linearität der Abbildung  $\mathbf{L}^3$  in den Variablen  $(\mathbf{d}, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}})$  folgt daher, daß die rechte Seite unserer Fixpunktgleichung in  $C^k$  bezüglich  $(\mu, \mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}})$  ist. Außerdem verschwindet die Ableitung nach  $(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}})$  an der Stelle  $(\mu_0, 0, 0)$ . Wir erhalten nach [8, Thm. 2.2.3] einen eindeutigen Fixpunkt, den wir mit  $\mathbf{L}^4(\boldsymbol{\omega}, \mu)$  bezeichnen. Man beachte, daß alle Normen gleichmäßig in  $\boldsymbol{\omega}$  abgeschätzt wurden. Deshalb ist der Definitionsbereich in den Variablen  $\mu$  unabhängig von  $\boldsymbol{\omega}$ . Wir können ebenso eine Version dieses Lemmas in ungewichteten Räumen, d.h. in der Supremumsnorm bezüglich der Zeit  $t$ , beweisen. Damit folgt die Eindeutigkeit in der Umgebung  $(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}})$  und das Lemma ist bewiesen.  $\square$

Damit haben wir die Existenz von Lösungen von (3.18) und (3.19) bewiesen. Allerdings konnten wir bisher nur die Differenzierbarkeit in  $\mu$  für festes  $\boldsymbol{\omega}$  nachweisen. Später werden wir zusätzlich die Differenzierbarkeit der Sprünge in den Rückkehrzeiten  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i)$  benötigen. Um dies nachzuweisen, führen wir zusätzliche Parameter  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)$  ein. Diese neuen Parameter reskalieren in jedem Durchlauf die Zeit  $t$ , wodurch die Lösungen für verschiedene Rückkehrzeiten vergleichbar werden, da sie dann auf den gleichen (reskalierten) Zeitintervallen definiert sind. Die Differenzierbarkeit in den Parametern  $\boldsymbol{\beta}$ , die wie die Differenzierbarkeit nach  $\mu$  folgt, impliziert daher die Differenzierbarkeit in  $\boldsymbol{\omega}$ .

Es sei also  $\boldsymbol{\beta} \in \prod_{i \in \mathbb{Z}} (-\delta_0, \delta_0) =: B$ , wobei  $\delta_0 < 0$  klein sei. Wir versehen  $B$  mit der Supremumsnorm. Zunächst wenden wir Lemma 3.3 auf die Gleichungen

$$(3.30) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x + (1 + \beta_{i+1})Ax &= (1 + \beta_{i+1})f(x, \mu) & t \geq 0 \\ \frac{d}{dt}\hat{x} + (1 + \beta_i)A\hat{x} &= (1 + \beta_i)f(x, \mu) & t \leq 0 \end{cases}$$

an. Daß dabei eine Unstetigkeit in den Differentialgleichungen bei  $t = 0$  auftritt, ist unwichtig; schließlich hatten wir die Differentialgleichungen sowieso für  $t \geq 0$  und  $t \leq 0$  getrennt



untersucht und bei  $t = 0$  die Lösungen nur zusammengesetzt. Dann erhalten wir Lösungen  $u_i(\beta_{i+1}, \mu, \cdot)$  und  $\hat{u}_i(\beta_i, \mu, \cdot)$  mit den Eigenschaften aus Lemma 3.3. Denn tatsächlich hängen die Lösungsäste  $u_i(\beta_{i+1}, \mu, t) = u_i(\mu, (1 + \beta_{i+1})t)$  nur von  $\beta_{i+1}$  und nicht von  $\beta_i$  ab. Das gleiche gilt für  $\hat{u}_i(\beta_i, \mu, t) = \hat{u}_i(\mu, (1 + \beta_i)t)$ .

Wir linearisieren entlang der Äste  $u_i(\beta_{i+1}, \mu, t)$  und  $\hat{u}_i(\beta_i, \mu, t)$  und erhalten die Differentialgleichungen

$$(3.31) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}v + A_i(\beta_{i+1}, \mu, t)v = g_i(t, v, \beta_{i+1}, \mu) & t \geq 0 \\ \frac{d}{dt}\hat{v} + A_i(\beta_{i+1}, \mu, t)\hat{v} = \hat{g}_i(t, \hat{v}, \beta_i, \mu) & t \leq 0 \end{cases}$$

für die Korrekturen  $x(t) = q_i(t) + u_i(\beta_{i+1}, \mu, t) + v(t)$  einer Lösung von (3.30) und entsprechend für  $\hat{x}(t)$ . Die neuen Nichtlinearitäten sind von der Form

$$g_i(t, v, \beta_{i+1}, \mu) = (1 + \beta_{i+1}) \left( f(q_i(t) + u_i(\beta_{i+1}, \mu, t) + v, \mu) - f(q_i(t) + u_i(\beta_{i+1}, \mu, t), \mu) - D_x f(q_i(t) + u_i(\beta_{i+1}, \mu, t), \mu) v \right)$$

und einem entsprechenden Ausdruck für  $\hat{g}_i$ . Insbesondere gilt für diese Nichtlinearitäten wieder Lemma 3.13 und Bemerkung 3.14.

Nun betrachten wir wieder das System (3.19) aus Rand- und Sprungbedingungen mit den reskalierten Differentialgleichungen (3.31) anstelle von (3.18). Damit beweisen wir leicht eine neue Version von Lemma 3.16 und erhalten eine Familie

$$(3.32) \quad \mathbf{L}^5(\boldsymbol{\beta}, \mu) : B \times M \rightarrow \mathcal{V} \times \hat{\mathcal{V}} \in C^k,$$

die die Gleichungen (3.19) und (3.31) lösen und zusätzlich  $k$ -mal differenzierbar in  $(\boldsymbol{\beta}, \mu)$  sind. Die zugehörigen Lösungen  $X_i^1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu, \cdot)$  und  $\hat{X}_i^1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu, \cdot)$  von (3.30) erfüllen dann die Gleichungen (3.16), die wir hier wiederholen:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} (R) \quad & x_{i-1}(\omega_i) = \hat{x}_i(-\omega_i) \\ (S) \quad & \begin{cases} x_i(0), \hat{x}_i(0) \in \Sigma_i \\ \hat{x}_i(0) - x_i(0) \in Z_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite können wir unsere alten in Lemma 3.16 erhaltenen Lösungen

$$\begin{aligned} x_i(\boldsymbol{\omega}, \mu, t) &= q_i(t) + u_i(\mu, t) + w_i(\boldsymbol{\omega}, \mu, t) & t \in [0, \omega_{i+1}] \\ \hat{x}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu, t) &= q_i(t) + \hat{u}_i(\mu, t) + \hat{w}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu, t) & t \in [-\omega_i, 0] \end{aligned}$$

von (3.16) folgendermaßen reskalieren:

$$X_i^2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu, t) := q_i\left((1 + \beta_{i+1})t\right) + u_i\left(\mu, (1 + \beta_{i+1})t\right) + w_i\left(\left((1 + \beta_j)\omega_j\right), \mu, (1 + \beta_{i+1})t\right)$$

für  $t \in [0, \omega_{i+1}]$  und

$$\hat{X}_i^2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu, t) := q_i\left((1 + \beta_i)t\right) + \hat{u}_i\left(\mu, (1 + \beta_i)t\right) + \hat{w}_i\left(\left((1 + \beta_j)\omega_j\right), \mu, (1 + \beta_i)t\right)$$

für  $t \in [-\omega_i, 0]$ . Auch diese reskalierten Lösungen erfüllen dann das System (3.33) und die Differentialgleichung (3.30), wie wir leicht nachrechnen. Daher folgt aus der Eindeutigkeit schließlich

$$\begin{aligned} X_i^1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu, \cdot) &= X_i^2(\boldsymbol{\omega}, \mu, \boldsymbol{\beta}; \cdot) \\ \hat{X}_i^1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu, \cdot) &= \hat{X}_i^2(\boldsymbol{\omega}, \mu, \boldsymbol{\beta}; \cdot). \end{aligned}$$

Diese Identität impliziert insbesondere

$$\xi_i\left(\left((1 + \beta_j)\omega_j, \mu\right)\right) = \xi_i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu).$$

Nun ist  $\xi_i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \mu)$  in  $C^k(B \times M)$  gemeinsam in  $(\boldsymbol{\beta}, \mu)$  differenzierbar. Deshalb ist  $\xi_i(\boldsymbol{\omega}, \mu)$  differenzierbar in  $\omega_j$ . Damit haben wir die folgende Bemerkung bewiesen.

**Bemerkung 3.17** *Die Sprünge  $\xi_i(\boldsymbol{\omega}, \mu)$  sind gemeinsam differenzierbar in  $(\boldsymbol{\omega}, \mu)$ . Tatsächlich ist  $\xi_i \in C^k(B \times M)$ .*

### 3.3.2 Die Abschätzung der Restterme

In diesem Abschnitt werden wir nun Abschätzungen für die Größe der Sprünge in  $Z_i$ -Richtung bereit stellen. Dazu werden wir weiterhin die oben konstruierten, von  $\boldsymbol{\beta}$  abhängigen Lösungen verwenden, denn der Ableitung von  $\xi_j$  nach  $\beta_i$  entspricht ja nach der obenstehenden Bemerkung die Ableitung nach  $\omega_i$  (bis auf einen Faktor  $\omega_i$ ). Wir können also das Verhalten der Lösungen und Sprünge in der Variablen  $\boldsymbol{\omega}$  untersuchen, indem wir die Abhängigkeiten in den Parametern  $\boldsymbol{\beta}$  studieren.

**Bemerkung 3.18** *Wir beachten, daß die neuen exponentiellen Dichotomien  $P_i^s(\beta_{i+1}, \mu, t)$  und  $\hat{P}_i^u(\beta_i, \mu, t)$ , sowie die Nichtlinearitäten  $g_i$  und  $\hat{g}_i$  als auch die "Koordinatenkurven"  $q_i(t) + u_i(\beta_{i+1}, \mu, t)$  und  $q_i(t) + \hat{u}_i(\beta_i, \mu, t)$  tatsächlich nur von den einzelnen Parametern  $\beta_{i+1}$  beziehungsweise  $\beta_i$  abhängen (und nicht von dem ganzen Parameter  $\boldsymbol{\beta}$ ). Dies folgt ja aus der verwendeten Skalierung der ursprünglichen Differentialgleichungen.*

Deshalb erhalten wir aus Bemerkung 3.8 die folgende Darstellung der Sprünge

$$\begin{aligned} \xi_i(\boldsymbol{\omega}, \mu) &= \left\langle \Psi_i(\beta_i, \mu, -\omega_i), \hat{P}_i^s(\beta_i, \mu, -\omega_i) a_i^s(\boldsymbol{\beta}, \mu) \right\rangle - \\ &\quad \left\langle \Psi_i(\beta_{i+1}, \mu, \omega_{i+1}), P_{i+1}^u(\beta_{i+1}, \mu, \omega_{i+1}) a_{i+1}^u(\boldsymbol{\beta}, \mu) \right\rangle + \\ &\quad \int_{-\omega_i}^0 \left\langle \Psi_i(\beta_i, \mu, t), \hat{g}_i^s(t, v_i(\boldsymbol{\beta}, \mu, t), \mu, \beta_i) \right\rangle ds + \\ &\quad \int_0^{\omega_{i+1}} \left\langle \Psi_i(\beta_{i+1}, \mu, t), g_i^u(t, v_i(\boldsymbol{\beta}, \mu, t), \mu, \beta_{i+1}) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Wir wiederholen nun noch einmal die Integralgleichungen, die wir im folgenden abschätzen werden. Dabei werden wir die Abhängigkeit von  $\mu$  unterdrücken. Zunächst wiederholen wir

Gleichung (3.29)

$$(3.34) \quad \begin{cases} w_i^s(t) &= T_i(\beta_{i+1}, t, 0) b_i^s + \int_0^t T_i(\beta_{i+1}, t, s) P_{i+1}^s(\beta_{i+1}, s) g_i^s(s, w_i^s, w_i^u, \beta_{i+1}) ds \\ w_i^u(t) &= T_i(\beta_{i+1}, t, \omega_{i+1}) P_{i+1}^u(\beta_{i+1}, \omega_{i+1}) a_{i+1}^u + \\ &\quad \int_{\omega_{i+1}}^t T_i(\beta_{i+1}, t, s) P_{i+1}^u(\beta_{i+1}, s) g_i^u(s, w_i^s, w_i^u, \beta_{i+1}) ds \\ \hat{w}_i^s(t) &= T_i(\beta_i, t, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s + \\ &\quad \int_{-\omega_i}^t T_i(\beta_i, t, s) \hat{P}_i^s(\beta_i, s) \hat{g}_i^s(s, \hat{w}_i^s, \hat{w}_i^u, \beta_i) ds \\ \hat{w}_i^u(t) &= T_i(\beta_i, t, 0) b_i^u + \int_0^t T_i(\beta_i, t, s) \hat{P}_i^u(\beta_i, s) \hat{g}_i^u(s, \hat{w}_i^s, \hat{w}_i^u, \beta_i) ds. \end{cases}$$

Hier ist  $t \in [0, \omega_{i+1}]$  in den ersten beiden und  $t \in [-\omega_i, 0]$  in den letzten beiden Gleichungen.

Ferner ist  $b_i$  nach Lemma 3.7 gegeben durch

$$(3.35) \quad (b_i^s, b_i^u) = B_i^2(w_i^u(0), \hat{w}_i^s(0)),$$

wobei  $B_i^2$  linear in  $(w_i^u(0), \hat{w}_i^s(0))$  ist. Wir beachten, daß  $B_i^2$  nicht explizit von  $\mu$  abhängt.

Die Größen  $(a_i^s, a_i^u)$  waren durch die Fixpunktgleichung (3.25)

$$(3.36) \quad \begin{cases} \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s &= -d_i^s(\beta_i) + P_i^s(\beta_i, \omega_i) w_{i-1}(\omega_i) + P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u + \\ &\quad P_i^u \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s \\ P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u &= d_i^u(\beta_i) + \hat{P}_i^u(\beta_i, -\omega_i) \hat{w}_i(-\omega_i) + P_i^u \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s + \\ &\quad P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u \end{cases}$$

definiert worden. Dabei wird  $d_i$  wie in (3.17) unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von  $\beta$  gegeben durch

$$d_i(\beta_i, \omega_i) := q_i(-(1 + \beta_i)\omega_i) + \hat{u}_i(\mu, -(1 + \beta_i)\omega_i) - q_{i-1}((1 + \beta_i)\omega_i) - u_{i-1}(\mu, (1 + \beta_i)\omega_i).$$

In allen obenstehenden Ausdrücken hängen natürlich  $w_i(\beta, \mu)$  und  $\hat{w}_i(\beta, \mu)$  von  $\beta$  ab.

Die Gleichungen (3.34) bis (3.36) müssen nun abgeschätzt werden. Wir beschränken uns dabei auf Abschätzungen der Ableitungen erster Ordnung in  $\beta$ , denn diese reicht für die später behandelte Anwendung aus. Abschätzungen für die höheren Ableitungen erhält man aber auf die gleiche Art und Weise.

**Definition.** Wir definieren

$$\begin{aligned} A_i^u(\beta_i) &:= T_{i-1}(\beta_i, 0, \omega_i) P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u \\ A_i^s(\beta_i) &:= T_i(\beta_i, 0, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} J_i^u &:= \int_0^{\omega_{i+1}} T_i(\beta_{i+1}, 0, t) P_{i+1}^u(\beta_{i+1}, t) g_i^u(t, w_i^s, w_i^u, \beta_{i+1}) dt \\ J_i^s &:= \int_{-\omega_i}^0 T_i(\beta_i, 0, t) \hat{P}_i^s(\beta_i, t) \hat{g}_i^s(t, \hat{w}_i^s, \hat{w}_i^u, \beta_i) dt. \end{aligned}$$

Ferner werden wir Konstanten, die unabhängig von  $(\omega, \beta, \mu)$  sind, gleich eins setzen. Da wir nur Abschätzungen bereit stellen, ist dies wohl gerechtfertigt. Weiter bezeichnet  $\|\cdot\|$  oft auch die Supremumsnorm für Familien von Vektoren. Zuletzt definieren wir die Restterme  $R_i$  durch

$$R_i^s := \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s + d_i^s, \quad R_i^u := P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u - d_i^u.$$

beziehungsweise durch dessen Norm.

Mit diesen Definitionen können wir (3.35) mit Hilfe von (3.34) folgendermaßen umschreiben:

$$(3.37) \quad (b_i^s, b_i^u) = B_i^2 (A_{i+1}^u + J_i^u, A_i^s + J_i^s).$$

Wir führen weitere exponentielle Dichotomien ein. Diese werden benötigt, um die schwach und stark kontrahierenden beziehungsweise expandierenden Richtungen unterschiedlich abschätzen zu können. Wir werden dann insbesondere den Term  $T_i(\beta_{i+1}, 0, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i)$  in die schwach und stark kontrahierenden Richtungen aufspalten können. Diese unterschiedlichen Abschätzungen brauchen wir später bei der Behandlung der Orbit-Flip Verzweigung.

**Definition.** Das Spektrum  $\sigma(-A_i)$  erlaube die Aufspaltung in Spektralmengen  $\sigma(-A_i) = \sigma_i^{ss} \cup \sigma_i^s \cup \sigma_i^u \cup \sigma_i^{uu}$  mit

$$\operatorname{Re} \sigma_i^{ss} < -\alpha_i^{ss} < \operatorname{Re} \sigma_i^s < -\alpha_i^s < 0 < \alpha_i^u < \operatorname{Re} \sigma_i^u < \alpha_i^{uu} < \operatorname{Re} \sigma_i^{uu}.$$

Wir bezeichnen die Projektionen auf die zu  $\sigma_i^s$  und  $\sigma_i^{ss}$  gehörenden Eigenräume mit  $Q_i^s$  und  $Q_i^{ss}$ . Insbesondere ist daher  $Q_i^s + Q_i^{ss} = P_i^s$ . Analog sind  $Q_i^u$  und  $Q_i^{uu}$  definiert mit  $Q_i^u + Q_i^{uu} = P_i^u$ . Wir erhalten aus Lemma 1.1 die zugehörigen exponentiellen Dichotomien der gestörten Gleichungen  $\dot{x} = -A_i(\beta_i, \mu, t) x$ . Dabei benötigen wir  $\hat{Q}_i^s(\beta_i, \mu, t)$  und  $\hat{Q}_i^{ss}(\beta_i, \mu, t)$  für  $t \leq 0$ , sowie  $Q_i^u(\beta_i, \mu, t)$  und  $Q_i^{uu}(\beta_i, \mu, t)$  für  $t \geq 0$ . Aus dem Beweis von Lemma 1.1 und der getroffenen Koordinatentransformationen folgt dann

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i^s(\beta_i, \mu, t) + \hat{Q}_i^{ss}(\beta_i, \mu, t) &= \hat{P}_i^s(\beta_i, \mu, t) & t \leq 0 \\ Q_i^u(\beta_i, \mu, t) + Q_i^{uu}(\beta_i, \mu, t) &= P_i^u(\beta_i, \mu, t) & t \geq 0. \end{aligned}$$

Diese Dichotomien erfüllen die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\partial_j (T_{i-1}(\beta_i, s, t) Q_i^u(\beta_i, t))| &\leq K e^{-(\alpha_i^u + \gamma)(t-s)} & 0 \leq s \leq t \\ |\partial_j (T_{i-1}(\beta_i, s, t) Q_i^{uu}(\beta_i, t))| &\leq K e^{-\alpha_i^{uu}(t-s)} & 0 \leq s \leq t \\ |\partial_j (T_i(\beta_i, t, s) \hat{Q}_i^s(\beta_i, s))| &\leq K e^{-(\alpha_i^s + \gamma)(t-s)} & s \leq t \leq 0 \\ |\partial_j (T_i(\beta_i, t, s) \hat{Q}_i^{ss}(\beta_i, s))| &\leq K e^{-\alpha_i^{ss}(t-s)} & s \leq t \leq 0 \end{aligned}$$

für  $\partial_j = D_{(\beta_i, \mu)}^j$  und  $j = 0, 1$ . Zuletzt noch eine letzte Definition. Wir bezeichnen mit  $r_i^s$  und  $r_i^u$  die Konvergenzraten der exponentiellen Dichotomien gegen die konstanten Spektralprojektionen, d.h. es sei

$$\left. \begin{aligned} |D_{\beta_i}^j (P_i^s(\beta_i, \mu, t) - P_i^s)| \\ |D_{\beta_i}^j (Q_i^u(\beta_i, \mu, t) - Q_i^u)| \\ |D_{\beta_i}^j (Q_i^{uu}(\beta_i, \mu, t) - Q_i^{uu})| \end{aligned} \right\} \leq r_i^s(t)$$

für  $t \geq 0$  und  $j = 0, 1$ . Entsprechend definieren wir  $r_i^u(t)$  für  $t \leq 0$  bezüglich der Projektionen  $\hat{P}_i^u$ ,  $\hat{Q}_i^s$  und  $\hat{Q}_i^{ss}$ .

**Bemerkung 3.19** *Es gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} r_i^s &:= r_i^s(\omega_i) &\leq K e^{-\alpha_i^s \omega_i} \\ r_i^u &:= r_i^u(-\omega_i) &\leq K e^{-\alpha_i^u \omega_i}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die Behauptung folgt aus Lemma 1.1(ii) und den vorgenommenen Koordinatenwechseln.  $\square$

Die Konvergenzrate wird später mit Lemma 1.1(iii) besser abgeschätzt werden können.

**Lemma 3.20** *Es gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} |J_i^s| &\leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} \|\mathbf{d}\|^2 & |J_i^u| &\leq e^{-\alpha_i^u \omega_{i+1}} \|\mathbf{d}\|^2 \\ \|\mathbf{a}\| &\leq \|\mathbf{d}\|. \end{aligned}$$

Ferner gelten mit der Definition

$$\begin{aligned} S_0 &:= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left( e^{-\alpha_k^s \omega_k} |Q_k^s d_k^s| + e^{-\alpha_k^u \omega_k} |Q_k^u d_k^u| + \right. \\ &\quad \left. \|\mathbf{d}\| \left( e^{-\alpha_k \omega_k} (r_k^s + r_k^u) + \|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_k^s \omega_k} + e^{-\alpha_k^u \omega_k} \right) \right) \end{aligned}$$

die folgenden Abschätzungen für die Restterme

$$\begin{aligned} R_i^s &\leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} S_0 + (r_i^s + r_i^u) \|\mathbf{d}\| \\ R_i^u &\leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} S_0 + (r_i^s + r_i^u) \|\mathbf{d}\|. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir stellen als erstes alle beteiligten Größen durch  $\mathbf{a}$  dar. Anschließend schätzen wir  $\mathbf{a}$  mit Hilfe von Gleichung (3.36) durch  $\mathbf{d}$  ab. Zunächst folgt aus (3.34) und Bemerkung 3.14 leicht

$$(3.38) \quad \begin{cases} \|w_i^u\| &\leq |a_{i+1}^u| & \|w_i^s\| &\leq |b_i^s| + |w_i^u|^2 \\ \|\hat{w}_i^s\| &\leq |a_i^s| & \|\hat{w}_i^u\| &\leq |b_i^u| + |\hat{w}_i^s|^2. \end{cases}$$

Wir schätzen zuerst  $J_i^u$  und  $J_i^s$  ab. Dazu beachten wir, daß nach Definition der Norm in  $V_i^u$

$$\begin{aligned} |J_i^u| &\leq \int_0^{\omega_{i+1}} |T_i(\beta_{i+1}, 0, t) P_{i+1}^u(\beta_{i+1}, t)| |g_i^u(t, w_i^s, w_i^u, \beta_{i+1})| dt \\ &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} \|G_i^u(w_i^s, w_i^u)\| \\ &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} \|w_i^u\| (|w_i^s| + |w_i^u|) \\ &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u| (|b_i^s| + |a_{i+1}^u|) \end{aligned}$$

gilt und analog für  $J_i^s$

$$|J_i^s| \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_i^s| (|b_i^u| + |a_i^s|).$$

Aus diesen Ungleichungen und aus (3.37) folgt daher

$$\begin{aligned} |b_i^s| + |b_i^u| &\leq |A_i^s| + |J_i^s| + |A_{i+1}^u| + |J_i^u| \\ &\leq |A_i^s| + |A_{i+1}^u| + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u| (|b_i^s| + |a_{i+1}^u|) + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_i^s| (|a_i^s| + |b_i^u|) \\ &\leq |A_i^s| + |A_{i+1}^u| + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u|^2 + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_i^s|^2. \end{aligned}$$

Wir setzen diese Abschätzung wieder in die obenstehenden Abschätzungen für  $w_i^s$ ,  $\hat{w}_i^u$ ,  $J_i^u$  und  $J_i^s$  ein und erhalten

$$(3.39) \quad \begin{cases} \|w_i^s\| &\leq |A_i^s| + |A_{i+1}^u| + |a_{i+1}^u|^2 + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_i^s|^2 \\ \|\hat{w}_i^u\| &\leq |A_i^s| + |A_{i+1}^u| + |a_i^s|^2 + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u|^2 \\ |J_i^u| &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u| (|a_{i+1}^u| + |A_i^s| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_i^s|^2) \\ |J_i^s| &\leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_i^s| (|a_i^s| + |A_{i+1}^u| + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u|^2). \end{cases}$$

Wir werden jetzt die Fixpunktgleichung (3.36) für  $\mathbf{a}$  angehen. Aus der Definition der Normen in  $V_i$  und (3.39) folgt zunächst

$$\begin{aligned} |w_i^s(\omega_{i+1})| &\leq e^{-\alpha_{i+1}^s \omega_{i+1}} (|A_i^s| + |A_{i+1}^u| + |a_{i+1}^u|^2 + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_i^s|^2) \\ |\hat{w}_i^u(-\omega_i)| &\leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} (|A_i^s| + |A_{i+1}^u| + |a_i^s|^2 + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u|^2). \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen setzen wir in (3.36) ein. Dann erhalten wir für die Restterme  $R_i^s = |\hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s + d_i^s|$  und  $R_i^u = |P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u - d_i^u|$  die Abschätzung

$$(3.40) \quad \begin{cases} R_i^s &\leq |w_{i-1}^s(\omega_i)| + |P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| + |P_i^u P_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| \\ &\leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|A_{i-1}^s| + |A_i^u| + |a_i^u|^2 + e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |a_{i-1}^s|^2) + r_i^s |a_i^u| + r_i^u |a_i^s| \\ R_i^u &\leq |\hat{w}_i^u(-\omega_i)| + |P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| + |P_i^u P_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| \\ &\leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} (|A_i^s| + |A_{i+1}^u| + |a_i^s|^2 + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |a_{i+1}^u|^2) + r_i^s |a_i^u| + r_i^u |a_i^s|. \end{cases}$$

Insbesondere folgt daher

$$(3.41) \quad \begin{cases} |a_i^s| &\leq |d_i^s| + R_i^s \\ &\leq |d_i^s| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|a_{i-1}^s| + |a_i^u|) + r_i^s |a_i^u| + r_i^u |a_i^s| \\ |a_i^u| &\leq |d_i^u| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} (|a_i^s| + |a_{i+1}^u|) + r_i^s |a_i^s| + r_i^u |a_i^u| \end{cases}$$

und deshalb ist für  $\omega_i \geq \Omega$

$$\begin{aligned} |a_i^s| + |a_i^u| &\leq |d_i^s| + |d_i^u| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|a_{i-1}^s| + |a_i^u|) + e^{-\alpha_i^u \omega_i} (|a_i^s| + |a_{i+1}^u|) + r_i^s |a_i^u| + r_i^u |a_i^s| \\ &\leq |d_i^s| + |d_i^u| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |a_{i-1}^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |a_{i+1}^u|. \end{aligned}$$

Wir können jetzt die Supremumsnorm auf beiden Seiten nehmen und erhalten die gewünschte Abschätzung

$$(3.42) \quad \|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{d}\|.$$

Aus dieser Gleichung und (3.39) folgen schließlich die Behauptungen über  $J_i^u$  und  $J_i^s$ . Wir müssen nunmehr noch die letzte Abschätzung (3.40) für  $R_i^s$  und  $R_i^u$  verbessern. Hier kommen nun die neuen Dichotomien  $Q^u$  und  $Q^{uu}$  sowie  $\hat{Q}^s$  und  $\hat{Q}^{ss}$  ins Spiel. Wir schreiben zuerst  $A_i^s$  und  $A_i^u$  um:

$$\begin{aligned} A_i^s &= T_i(\beta_i, 0, -\omega_i) \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s \\ &= T_i(\beta_i, 0, -\omega_i) \left( \hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) + \hat{Q}_i^{ss}(\beta_i, -\omega_i) \right) a_i^s \\ A_i^u &:= T_{i-1}(\beta_i, 0, \omega_i) P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u \\ &= T_{i-1}(\beta_i, 0, -\omega_i) (Q_i^u(\beta_i, \omega_i) + Q_i^{uu}(\beta_i, \omega_i)) a_i^u \end{aligned}$$

und es folgt

$$(3.43) \quad \begin{cases} |A_i^s| \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} |\hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| + e^{-\alpha_i^{ss} \omega_i} |a_i^s| \\ |A_i^u| \leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| + e^{-\alpha_i^{uu} \omega_i} |a_i^u|. \end{cases}$$

Damit können wir nun die Restterme unter Beachtung von (3.42) durch

$$(3.44) \quad \begin{cases} R_i^s \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} \left( e^{-\alpha_{i-1}^{ss} \omega_{i-1}} |a_{i-1}^s| + e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |\hat{Q}_{i-1}^s(\beta_{i-1}, -\omega_{i-1}) a_{i-1}^s| + \right. \\ \left. e^{-\alpha_i^{uu} \omega_i} |a_i^u| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| + |a_i^u|^2 + e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |a_{i-1}^s|^2 \right) + \\ r_i^s |a_i^u| + r_i^u |a_i^s| \\ \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} \left( \|\mathbf{d}\| (\|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_{i-1}^{ss} \omega_{i-1}} + e^{-\alpha_i^{uu} \omega_i}) + \right. \\ \left. e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |\hat{Q}_{i-1}^s(\beta_{i-1}, -\omega_{i-1}) a_{i-1}^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| \right) + \\ (r_i^s + r_i^u) \|\mathbf{d}\| \end{cases}$$

und

$$R_i^u \leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} \left( \|\mathbf{d}\| (\|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_i^{ss} \omega_i} + e^{-\alpha_i^{uu} \omega_{i+1}}) + \right. \\ \left. e^{-\alpha_i^s \omega_i} |\hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |Q_{i+1}^u(\beta_{i+1}, \omega_{i+1}) a_{i+1}^u| \right) + (r_i^s + r_i^u) \|\mathbf{d}\|$$

abschätzen. Aus der Fixpunktgleichung (3.36) für  $\mathbf{a}$  folgt nun

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s &= -Q_i^s d_i^s + (Q_i^s - \hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i)) d_i^s + \\ &\quad \hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) \left( w_{i-1}^s(\omega_i) + P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u + P_i^u P_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s \right) \\ Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u &= Q_i^u d_i^u + (Q_i^u(\beta_i, \omega_i) - Q_i^u) d_i^u + \\ &\quad Q_i^u(\beta_i, \omega_i) \left( w_i^u(-\omega_i) + P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u + P_i^u P_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s \right). \end{aligned}$$

Dabei beachte man, daß die Projektionen  $Q^u(t)$  und  $P^u(t)$  sowie  $\hat{Q}^s(t)$  und  $\hat{P}^s(t)$  nach Definition vertauschen. Wir schätzen diese Gleichungen nun ab. Zunächst folgt

$$\begin{aligned} |\hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| &\leq |Q_i^s d_i^s| + r_i^u \|\mathbf{d}\| + R_i^s \\ |Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| &\leq |Q_i^u d_i^u| + r_i^s \|\mathbf{d}\| + R_i^u. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit  $e^{-\alpha_i^s \omega_i}$ , die zweite mit  $e^{-\alpha_i^u \omega_i}$  und addieren beide Ungleichungen

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_i^s \omega_i} |\hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| \\ \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} |Q_i^s d_i^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u d_i^u| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} (r_i^u \|\mathbf{d}\| + R_i^s) + e^{-\alpha_i^u \omega_i} (r_i^s \|\mathbf{d}\| + R_i^u). \end{aligned}$$

Anschließend setzen wir die Abschätzungen aus Gleichung (3.44) für  $R_i^s$  und  $R_i^u$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_i^s \omega_i} |\hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| \\ \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} |Q_i^s d_i^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u d_i^u| + \\ e^{-\alpha_i^s \omega_i} e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |\hat{Q}_{i-1}^s(\beta_{i-1}, -\omega_{i-1}) a_{i-1}^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |Q_{i+1}^u(\beta_{i+1}, \omega_{i+1}) a_{i+1}^u| + \\ \|\mathbf{d}\| \left( e^{-\alpha_i \omega_i} (r_i^u + r_i^s) + e^{-2\alpha_i \omega_i} \|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_{i-1}^{ss} \omega_{i-1}} + e^{-\alpha_{i+1}^{uu} \omega_{i+1}} + e^{-\alpha_i^{uu} \omega_i} + e^{-\alpha_i^{ss} \omega_i} \right). \end{aligned}$$

Wir bilden nun wieder das Supremum über  $i$  und erhalten als Ergebnis

$$\begin{aligned}
& \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left( e^{-\alpha_i^s \omega_i} |\hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| \right) \\
& \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left( e^{-\alpha_i^s \omega_i} |Q_i^s d_i^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |Q_i^u d_i^u| + \right. \\
& \quad \left. \|\mathbf{d}\| \left( e^{-\alpha_i \omega_i} (r_i^u + r_i^s) + e^{-2\alpha_i \omega_i} \|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_i^{ss} \omega_i} + e^{-\alpha_i^{uu} \omega_i} \right) \right) \\
& \leq S_0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir alle benötigten Ungleichungen beisammen, um die Behauptungen über die Abschätzungen der Restterme zu zeigen. Diese folgen nämlich unmittelbar aus (3.44) und der obenstehenden Ungleichung. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Als nächstes behandeln wir die Ableitungen nach den Parametern  $\beta_j$ .

**Definition.** Wir definieren:

$$\begin{aligned}
|a_i|_1 &:= |a_i| + |D_{\beta_i} a_i| & |A_i|_1 &:= |A_i| + |D_{\beta_i} A_i| \\
|b_i^s|_1 &:= |b_i^s| + |D_{\beta_{i+1}} b_i^s| & |b_i^u|_1 &:= |b_i^u| + |D_{\beta_i} b_i^u| \\
|J_i^u|_1 &:= |J_i^u| + |D_{\beta_{i+1}} J_i^u| & |J_i^s|_1 &:= |J_i^s| + |D_{\beta_i} J_i^s| \\
\|w_i\|_1 &:= \|w_i\| + \|D_{\beta_{i+1}} w_i\| & \|\hat{w}_i\|_1 &:= \|\hat{w}_i\| + \|D_{\beta_i} \hat{w}_i\|.
\end{aligned}$$

Weiterhin treffen wir die folgende Konvention: es bezeichne  $|D_{\beta_j} y_i|^*$  den Ausdruck  $|y_i| + |D_{\beta_j} y_i|$ , sofern dieser Ausdruck in der obenstehenden Liste von Definitionen vorkommt. Ansonsten bezeichne  $|D_{\beta_j} y_i|^*$  einfach den Term  $|D_{\beta_j} y_i|$ . Zum Beispiel ist  $\|D_{\beta_{i+1}} w_i\|^* = \|w_i\| + \|D_{\beta_{i+1}} w_i\|$ , während  $\|D_{\beta_j} w_i\|^* = \|D_{\beta_j} w_i\|$  für  $j \neq i+1$  ist.

**Lemma 3.21** *Es sei  $j \in \mathbb{Z}$  fest gewählt. Dann gelten die folgenden Abschätzungen für die Ableitungen nach  $\beta_j$*

$$\begin{aligned}
|D_{\beta_j} J_i^u| &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} \left( e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} + e^{-\alpha_i^s \omega_i} \right) e^{-\alpha_j \omega_j} \left( |d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0 \right) \|\mathbf{d}\| \quad \text{für } i \neq j-1 \\
|J_{j-1}^u|_1 &\leq e^{-\alpha_j^u \omega_j} |d_j|_1 \|\mathbf{d}\| \\
|D_{\beta_j} J_i^s| &\leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} \left( e^{-\alpha_i^s \omega_i} + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} \right) e^{-\alpha_j \omega_j} \left( |d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0 \right) \|\mathbf{d}\| \quad \text{für } i \neq j \\
|J_j^s|_1 &\leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} |d_j|_1 \|\mathbf{d}\|.
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}
S_1 &:= e^{-\alpha_j^s \omega_j} |Q_j^s d_j^s| + e^{-\alpha_j^u \omega_j} |Q_j^u d_j^u| + |d_j|_1 \left( e^{-\alpha_j^{ss} \omega_j} + e^{-\alpha_j^{uu} \omega_j} \right) + e^{-2\alpha_j \omega_j} S_0 + \\
& \quad e^{-\alpha_j \omega_j} |d_j|_1 \left( \|\mathbf{d}\| + \sup_{k \in \mathbb{Z}} (r_k^s + r_k^u + e^{-\alpha_k^{ss} \omega_k} + e^{-\alpha_k^{uu} \omega_k}) \right).
\end{aligned}$$

Für die Restterme gilt dann für  $i \neq j$

$$\begin{aligned}
|D_{\beta_j} R_i^s| &\leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} S_1 + e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{-\alpha_j \omega_j} r_i^s |d_j|_1 \\
|D_{\beta_j} R_i^u| &\leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} S_1 + e^{-\alpha_i^s \omega_i} e^{-\alpha_j \omega_j} r_i^u |d_j|_1
\end{aligned}$$



und für  $i = j$

$$\begin{aligned} |R_j^s|_1 &\leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} (S_0 + S_1 + |d_j|_1 \|\mathbf{d}\|) + r_j^s |d_j^u|_1 + r_j^u |d_j^s|_1 \\ |R_j^u|_1 &\leq e^{-\alpha_j^u \omega_j} (S_0 + S_1 + |d_j|_1 \|\mathbf{d}\|) + r_j^s |d_j^u|_1 + r_j^u |d_j^s|_1. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wie im Beweis von Lemma 3.20 stellen wir zunächst alle abzuschätzenden Ableitungen durch die Ableitungen der  $a_i$  nach  $\beta_j$  dar. Wir müssen hier stets zwei Fälle unterscheiden, denn es gibt sowohl Größen, die explizit, als auch Terme, die nur implizit, d.h. über die Kopplungsterme, von  $\beta_j$  abhängen.

Unter Beachtung von (3.38) folgt zunächst

$$(3.45) \quad \|w_i^u\|_1 \leq |a_{i+1}^u|_1 \quad \|\hat{w}_i^s\|_1 \leq |a_i^s|_1.$$

Weiterhin sehen wir, daß

$$(3.46) \quad \begin{cases} \|w_i^s\|_1 &\leq |b_i^s|_1 + \|w_i^u\|_1 |w_i^u| \\ &\leq |b_i^s|_1 + |a_{i+1}^u|_1 |a_{i+1}^u| \\ \|\hat{w}_i^u\|_1 &\leq |b_i^u|_1 + |a_i^s|_1 |a_i^s| \end{cases}$$

gilt. Als nächstes leiten wir die implizit abhängigen Terme ab. Es sei also  $i \neq j - 1$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|D_{\beta_j} w_i^u\| &\leq |D_{\beta_j} a_{i+1}^u| + \|w_i^u\| \|D_{\beta_j} w_i^s\| \\ &\leq |D_{\beta_j} a_{i+1}^u| + |a_{i+1}^u| \|D_{\beta_j} w_i^s\| \end{aligned}$$

und ebenso, wenn wir Lemma 3.20 benutzen,

$$\begin{aligned} \|D_{\beta_j} w_i^s\| &\leq |D_{\beta_j} b_i^s| + \|D_{\beta_j} w_i^u\| (\|w_i^s\| + |w_i^u|) \\ &\leq |D_{\beta_j} b_i^s| + |D_{\beta_j} a_{i+1}^u| \|\mathbf{d}\|. \end{aligned}$$

Für  $i \neq j - 1$  gelangen wir also zusammenfassend zu

$$(3.47) \quad \begin{cases} \|D_{\beta_j} w_i^u\| &\leq |D_{\beta_j} a_{i+1}^u| + |a_{i+1}^u| |D_{\beta_j} b_i^s| \\ \|D_{\beta_j} w_i^s\| &\leq |D_{\beta_j} b_i^s| + |D_{\beta_j} a_{i+1}^u| \|\mathbf{d}\|. \end{cases}$$

Ganz analog folgt natürlich für  $i \neq j$

$$(3.48) \quad \begin{cases} \|D_{\beta_j} \hat{w}_i^s\| &\leq |D_{\beta_j} a_i^s| + |a_i^s| |D_{\beta_j} b_i^u| \\ \|D_{\beta_j} \hat{w}_i^u\| &\leq |D_{\beta_j} b_i^u| + |D_{\beta_j} a_i^s| \|\mathbf{d}\|. \end{cases}$$

Nun schätzen wir die Ableitungen der Integralterme  $J_i^u$  und  $J_i^s$  ab. Es folgt zunächst

$$\begin{aligned} |D_{\beta_j} J_{j-1}^u| &\leq e^{-\alpha_j^u \omega_j} (\|w_{j-1}^u\|_1 (|w_{j-1}^s| + |w_{j-1}^u|) + \|w_{j-1}^u\| |w_{j-1}^s|) \\ &\leq e^{-\alpha_j^u \omega_j} (|a_j^u|_1 (|b_{j-1}^s| + |a_j^u|) + |a_j^u| |b_{j-1}^s|_1) \\ &\leq e^{-\alpha_j^u \omega_j} (|a_j^u|_1 \|\mathbf{d}\| + |a_j^u| |D_{\beta_j} b_{j-1}^s|). \end{aligned}$$

Die implizite Ableitung ergibt dagegen für  $i \neq j - 1$

$$\begin{aligned} |D_{\beta_j} J_i^u| &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (\|D_{\beta_j} w_i^u\| (|w_i^s| + |w_i^u|) + \|w_i^u\| |D_{\beta_j} w_i^s|) \\ &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} ( (|D_{\beta_j} a_{i+1}^u| + |a_{i+1}^u| |D_{\beta_j} b_i^s|) (|b_i^s| + |a_{i+1}^u|) + \\ &\quad |a_{i+1}^u| (|D_{\beta_j} b_i^s| + |D_{\beta_j} a_{i+1}^u| \|\mathbf{d}\|) ) \\ &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|D_{\beta_j} a_{i+1}^u| \|\mathbf{d}\| + |a_{i+1}^u| |D_{\beta_j} b_i^s|). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt aus den obenstehenden Abschätzungen und den analogen Untersuchungen für  $J_i^s$  daher

$$(3.49) \quad \begin{cases} |D_{\beta_j} J_i^u| & \leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* \|\mathbf{d}\| + |a_{i+1}^u| |D_{\beta_j} b_i^s|) \\ |D_{\beta_j} J_i^s| & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} a_i^s|^* \|\mathbf{d}\| + |a_i^s| |D_{\beta_j} b_i^u|). \end{cases}$$

Wir behandeln anschließend die Kopplungsterme  $b_i$ . Aus (3.49), Lemma 3.20 und der Gleichung (3.37) für  $b_i$  folgt

$$(3.50) \quad \begin{cases} |D_{\beta_j} b_i^s| + |D_{\beta_j} b_i^u| & \leq |D_{\beta_j} A_i^s| + |D_{\beta_j} J_i^s| + |D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + |D_{\beta_j} J_i^u| \\ & \leq |D_{\beta_j} A_i^s| + |D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} a_i^s|^* \|\mathbf{d}\| + \\ & \quad e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* \|\mathbf{d}\| \\ & \leq |D_{\beta_j} A_i^s| + |D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + \\ & \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} a_i^s|^* + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^*). \end{cases}$$

Wenn wir diese Ungleichung wieder in (3.49) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} |D_{\beta_j} J_i^u| & \leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* \|\mathbf{d}\| + |a_{i+1}^u| (|D_{\beta_j} A_i^s| + |D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + \\ & \quad e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} a_i^s|^* \|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* \|\mathbf{d}\|)) \\ & \leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* \|\mathbf{d}\| + |a_{i+1}^u| (|D_{\beta_j} A_i^s| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} a_i^s|^* \|\mathbf{d}\|)) \end{aligned}$$

und zusammenfassend mit der analogen Abschätzung für  $J_i^s$  schließlich

$$(3.51) \quad \begin{cases} |D_{\beta_j} J_i^u| & \leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (|D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* \|\mathbf{d}\| + \\ & \quad |a_{i+1}^u| (|D_{\beta_j} A_i^s| + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} a_i^s|^* \|\mathbf{d}\|)) \\ |D_{\beta_j} J_i^s| & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} a_i^s|^* \|\mathbf{d}\| + \\ & \quad |a_i^s| (|D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* \|\mathbf{d}\|)). \end{cases}$$

Jetzt können wir uns der Abschätzung von  $\mathbf{a}$  zuwenden. Dazu müssen wir zuerst wieder die Terme  $w_{i-1}^s(\omega_i)$  und  $\hat{w}_i^u(-\omega_i)$  behandeln. Aus (3.47) und (3.50) folgt zunächst für  $i \neq j$

$$\begin{aligned} |D_{\beta_j} w_{i-1}^s(\omega_i)| & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} b_{i-1}^s| + |D_{\beta_j} a_i^u| \|\mathbf{d}\|) \\ & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} A_{i-1}^s| + |D_{\beta_j} A_i^u| + \\ & \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} a_{i-1}^s|^* + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |D_{\beta_j} a_i^u|)) + |D_{\beta_j} a_i^u| \|\mathbf{d}\| \\ & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} A_{i-1}^s| + |D_{\beta_j} A_i^u| + \\ & \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} a_{i-1}^s|^* + |D_{\beta_j} a_i^u|)). \end{aligned}$$

Für  $i = j$  kommt zusätzlich der Term  $b_{i-1}^s$  vor. Diesen Term können wir nach dem Beweis von Lemma 3.20 durch  $S_0$  abschätzen. Wir erhalten damit also

$$|w_{j-1}^s(\omega_j)|_1 \leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} (|D_{\beta_j} A_{j-1}^s| + |D_{\beta_j} A_j^u| + S_0 + \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} |D_{\beta_j} a_{j-1}^s| + |a_j^u|_1)).$$

Zusammenfassend bekommen wir für  $i \neq j$

$$(3.52) \quad \begin{cases} |D_{\beta_j} w_{i-1}^s(\omega_i)| & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} A_{i-1}^s| + |D_{\beta_j} A_i^u| + \\ & \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} a_{i-1}^s|^* + |D_{\beta_j} a_i^u|)) \\ |w_{j-1}^s(\omega_j)|_1 & \leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} (|D_{\beta_j} A_{j-1}^s| + |D_{\beta_j} A_j^u| + S_0 + \\ & \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} |D_{\beta_j} a_{j-1}^s| + |a_j^u|_1)). \end{cases}$$

Eine analoge Formel gilt natürlich für  $\hat{w}_i(-\omega_i)$ . Für  $i \neq j$  können wir die Ableitungen von  $a_i$  durch

$$|D_{\beta_j} \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| \leq |D_{\beta_j} w_{i-1}^s(\omega_i)| + r_i^s |D_{\beta_j} a_i^u|$$

abschätzen. Wir erhalten also für  $i \neq j$ , nachdem wir (3.52) eingesetzt haben, die Ungleichungen

$$(3.53) \left\{ \begin{array}{l} |D_{\beta_j} \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} A_{i-1}^s|^* + |D_{\beta_j} A_i^u| + \\ \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} a_{i-1}^s|^* + |D_{\beta_j} a_i^u|)) + r_i^s |D_{\beta_j} a_i^u| \\ |D_{\beta_j} P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| \leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} (|D_{\beta_j} A_{i+1}^u|^* + |D_{\beta_j} A_i^s| + \\ \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* + |D_{\beta_j} a_i^s|)) + r_i^u |D_{\beta_j} a_i^s|. \end{array} \right.$$

Jetzt bilden wir die Ableitung von (3.36) für  $i = j$  und beachten dabei Bemerkung 3.19. Dann folgt

$$\begin{aligned} |\hat{P}_j^s(\beta_j, -\omega_j) a_j^s|_1 &\leq |d_j^s|_1 + |D_{\beta_j} w_{j-1}^s(\omega_j)| + r_j^s |a_j^u|_1 \\ &\leq |d_j^s|_1 + e^{-\alpha_j^s \omega_j} (|D_{\beta_j} A_{j-1}^s| + |D_{\beta_j} A_j^u| + S_0 + \\ &\quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} |D_{\beta_j} a_{j-1}^s| + |a_j^u|_1)) + r_j^s |a_j^u|_1 \end{aligned}$$

und es gibt wieder eine analoge Ungleichung für  $|P_j^u(\beta_j, \omega_j) a_j^u|_1$ . Zusammenfassend erhalten wir aus diesen Abschätzungen und aus (3.53)

$$(3.54) \left\{ \begin{array}{l} |D_{\beta_j} \hat{P}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s|^* \leq |D_{\beta_j} d_i^s|^* + e^{-\alpha_i^s \omega_i} (|D_{\beta_j} A_{i-1}^s| + |D_{\beta_j} A_i^u| + \delta_{ij} S_0 + \\ \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} a_{i-1}^s|^* + |D_{\beta_j} a_i^u|^*)) + r_i^s |D_{\beta_j} a_i^u|^* \\ |D_{\beta_j} P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u|^* \leq |D_{\beta_j} d_i^u|^* + e^{-\alpha_i^u \omega_i} (|D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + |D_{\beta_j} A_i^s| + \delta_{ij} S_0 + \\ \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^* + |D_{\beta_j} a_i^s|^*)) + r_i^u |D_{\beta_j} a_i^s|^*. \end{array} \right.$$

Nun addieren wir diese beiden Ungleichungen wieder wie in Lemma 3.20. Nach einigen Vereinfachungen gelangen wir zu der Ungleichung

$$(3.55) \quad \begin{aligned} &|D_{\beta_j} a_i^s|^* + |D_{\beta_j} a_i^u|^* \\ &\leq |D_{\beta_j} d_i^s|^* + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} A_{i-1}^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + \delta_{ij} e^{-\alpha_j \omega_j} S_0 + \\ &\quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_i^s \omega_i} e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} a_{i-1}^s|^* + e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|^*). \end{aligned}$$

Anschließend nehmen wir das Supremum über  $i \in \mathbb{Z}$  und es folgt

$$(3.56) \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}} (|D_{\beta_j} a_i^s|^* + |D_{\beta_j} a_i^u|^*) \leq |d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0.$$

Dieses Ergebnis können wir noch verbessern. Dazu multiplizieren wir alle Gleichungen in (3.55) außer der  $j$ -ten mit  $e^{\alpha_j \omega_j}$ . Dann erhalten wir für  $i \notin \{j-1, j, j+1\}$  die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} e^{\alpha_j \omega_j} (|D_{\beta_j} a_i^s| + |D_{\beta_j} a_i^u|) &\leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} e^{\alpha_j \omega_j} |D_{\beta_j} A_{i-1}^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{\alpha_j \omega_j} |D_{\beta_j} A_{i+1}^u| + \\ &\quad \|\mathbf{d}\| e^{\alpha_j \omega_j} (e^{-\alpha_i^s \omega_i} e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} a_{i-1}^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} a_{i+1}^u|). \end{aligned}$$

Für  $i = j - 1$  und  $i = j + 1$  bekommen wir dagegen

$$\begin{aligned}
& e^{\alpha_j \omega_j} (|D_{\beta_j} a_{j-1}^s| + |D_{\beta_j} a_{j-1}^u|) \\
& \leq e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} e^{\alpha_j \omega_j} |D_{\beta_j} A_{j-2}^s| + e^{-\alpha_{j-1}^u \omega_{j-1}} e^{\alpha_j \omega_j} |A_j^u|_1 + \\
& \quad \|\mathbf{d}\| e^{\alpha_j \omega_j} (e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} e^{-\alpha_{j-2}^s \omega_{j-2}} |D_{\beta_j} a_{j-2}^s| + e^{-\alpha_{j-1}^u \omega_{j-1}} e^{-\alpha_j^u \omega_j} |a_j^u|_1) \\
& \leq e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} e^{\alpha_j \omega_j} |D_{\beta_j} A_{j-2}^s| + e^{-\alpha_{j-1}^u \omega_{j-1}} |a_j^u|_1 + \\
& \quad \|\mathbf{d}\| (e^{\alpha_j \omega_j} e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} e^{-\alpha_{j-2}^s \omega_{j-2}} |D_{\beta_j} a_{j-2}^s| + e^{-\alpha_{j-1}^u \omega_{j-1}} |a_j^u|_1)
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
& e^{\alpha_j \omega_j} (|D_{\beta_j} a_{j+1}^s| + |D_{\beta_j} a_{j+1}^u|) \\
& \leq e^{-\alpha_{j+1}^s \omega_{j+1}} |a_j^s|_1 + e^{-\alpha_{j+1}^u \omega_{j+1}} e^{\alpha_j \omega_j} |D_{\beta_j} A_{j+2}^u| + \\
& \quad \|\mathbf{d}\| (e^{-\alpha_{j+1}^s \omega_{j+1}} |a_j^s|_1 + e^{\alpha_j \omega_j} e^{-\alpha_{j+1}^u \omega_{j+1}} e^{-\alpha_{j+2}^u \omega_{j+2}} |D_{\beta_j} a_{j+2}^u|).
\end{aligned}$$

Wieder nehmen wir nun das Supremum über  $i \in \mathbb{Z}$  mit  $i \neq j$  und erhalten schließlich nach einigen Umformungen die Abschätzung

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}, i \neq j} e^{\alpha_j \omega_j} (|D_{\beta_j} a_i^s| + |D_{\beta_j} a_i^u|) \leq |d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0$$

und zusammen mit (3.53) ergibt sich für  $i \neq j$

$$(3.57) \quad \begin{cases} |D_{\beta_j} a_i^s| & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} e^{-\alpha_j \omega_j} (|d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0) \\ |D_{\beta_j} a_i^u| & \leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{-\alpha_j \omega_j} (|d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0). \end{cases}$$

Damit können wir jetzt die Ableitungen der Integralterme  $J_i$  abschätzen. Aus (3.51) erhalten wir nämlich zusammen mit der obenstehenden Ungleichung (3.57)

$$\begin{aligned}
|D_{\beta_j} J_i^u| & \leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} (e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} + e^{-\alpha_i^s \omega_i}) e^{-\alpha_j \omega_j} (|d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0) \|\mathbf{d}\| \quad \text{für } i \neq j - 1 \\
|J_{j-1}^u|_1 & \leq e^{-\alpha_j^u \omega_j} |d_j|_1 \|\mathbf{d}\| \\
|D_{\beta_j} J_i^s| & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} (e^{-\alpha_i^s \omega_i} + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}}) e^{-\alpha_j \omega_j} (|d_j|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} S_0) \|\mathbf{d}\| \quad \text{für } i \neq j \\
|J_j^s|_1 & \leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} |d_j|_1 \|\mathbf{d}\|
\end{aligned}$$

und damit ist die erste Behauptung des Lemmas bewiesen.

Wir wenden uns nun der Abschätzung der Ableitungen der Restterme zu. Dazu müssen wir wieder wie im Beweis von Lemma 3.20 die Terme  $A_i$  genauer untersuchen. Wir schätzen zuerst die Terme  $D_{\beta_j} \hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s$  und  $D_{\beta_j} Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u$  ab. Wir erhalten dann für die gewichtete Summe dieser Ausdrücke für  $i \neq j$  aufgrund von (3.52):

$$\begin{aligned}
& e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} \hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |D_{\beta_j} Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u| \\
& \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} w_{i-1}^s(\omega_i)| + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |D_{\beta_j} \hat{w}_i^u(-\omega_i)| + e^{-\alpha_i \omega_i} (r_i^s |D_{\beta_j} a_i^u| + r_i^u |D_{\beta_j} a_i^s|) \\
& \leq e^{-\alpha_j \omega_j} |d_j|_1 (e^{-2\alpha_i \omega_i} (\|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} + e^{-\alpha_{i-1}^s \omega_{i-1}} + e^{-\alpha_i^s \omega_i} + e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}}) + \\
& \quad e^{-\alpha_i \omega_i} (e^{-\alpha_i^s \omega_i} r_i^u + e^{-\alpha_i^u \omega_i} r_i^s)) + e^{-\alpha_i \omega_i} e^{-\alpha_{i-1}^u \omega_{i-1}} |D_{\beta_j} \hat{Q}_{i-1}^s(\beta_{i-1}, -\omega_{i-1}) a_{i-1}^s|^* + \\
& \quad e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} Q_{i+1}^u(\beta_{i+1}, \omega_{i+1}) a_{i+1}^u|^*.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung für  $i = j$  lautet wieder wegen (3.52) wie folgt.

$$\begin{aligned}
& e^{-\alpha_j^s \omega_j} |\hat{Q}_j^s(\beta_j, -\omega_j) a_j^s|_1 + e^{-\alpha_j^u \omega_j} |Q_j^u(\beta_j, \omega_j) a_j^u|_1 \\
& \leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} |Q_j^s d_j^s|_1 + e^{-\alpha_j^s \omega_j} r_j^u |d_j^s|_1 + e^{-\alpha_j^s \omega_j} |w_{j-1}^s(\omega_j)|_1 + e^{-\alpha_j^s \omega_j} (r_j^s |a_j^u|_1 + r_j^u |a_j^s|_1) + \\
& \quad e^{-\alpha_j^u \omega_j} |Q_j^u d_j^u|_1 + e^{-\alpha_j^u \omega_j} r_j^s |d_j^u|_1 + e^{-\alpha_j^u \omega_j} |\hat{w}_j^u(-\omega_j)|_1 + e^{-\alpha_j^u \omega_j} (r_j^s |a_j^u|_1 + r_j^u |a_j^s|_1) \\
& \leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} |Q_j^s d_j^s|_1 + e^{-\alpha_j^u \omega_j} |Q_j^u d_j^u|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} (r_j^s + r_j^u) |d_j|_1 + e^{-2\alpha_j \omega_j} S_0 + \\
& \quad e^{-\alpha_j \omega_j} |d_j|_1 \left( \|\mathbf{d}\| + e^{-\alpha_j^u \omega_j} + e^{-\alpha_j^s \omega_j} + e^{-\alpha_{j+1}^u \omega_{j+1}} + e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} \right) + \\
& \quad e^{-\alpha_j \omega_j} \left( e^{-\alpha_{j-1}^s \omega_{j-1}} |D_{\beta_j} \hat{Q}_{j-1}^s(\beta_j, -\omega_{j-1}) a_{j-1}^s| + e^{-\alpha_{j+1}^u \omega_{j+1}} |D_{\beta_j} Q_{j+1}^u(\beta_j, \omega_{j+1}) a_{j+1}^u| \right).
\end{aligned}$$

Wir nehmen das Supremum der beiden oben abgeschätzten Terme über  $i \in \mathbb{Z}$  und erhalten die Ungleichung

$$\begin{aligned}
(3.58) \quad & \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left( e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} \hat{Q}_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s|^* + e^{-\alpha_i^u \omega_i} |D_{\beta_j} Q_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u|^* \right) \\
& \leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} |Q_j^s d_j^s|_1 + e^{-\alpha_j^u \omega_j} |Q_j^u d_j^u|_1 + e^{-\alpha_j \omega_j} |d_j|_1 + e^{-2\alpha_j \omega_j} S_0 + \\
& \quad \left( \|\mathbf{d}\| + \sup_{i \in \mathbb{Z}} (r_i^s + r_i^u + e^{-\alpha_i^u \omega_i} + e^{-\alpha_i^s \omega_i}) \right).
\end{aligned}$$

Damit können wir die Ableitungen der Restterme  $R_i^s$  und  $R_i^u$  abschätzen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
|D_{\beta_j} R_i^s|^* & \leq |D_{\beta_j} w_{i-1}^s(\omega_i)|^* + |D_{\beta_j} (P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u)|^* + |D_{\beta_j} (P_i^u P_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s)|^* \\
|D_{\beta_j} R_i^u|^* & \leq |D_{\beta_j} \hat{w}_i^u(-\omega_i)|^* + |D_{\beta_j} (P_i^s P_i^u(\beta_i, \omega_i) a_i^u)|^* + |D_{\beta_j} (P_i^u P_i^s(\beta_i, -\omega_i) a_i^s)|^*.
\end{aligned}$$

Wir setzen jetzt die oben bewiesenen Abschätzungen in die Ungleichungen (3.52) für  $|D_{\beta_j} w_{i-1}^s(\omega_i)|^*$  und  $|D_{\beta_j} \hat{w}_i^u(-\omega_i)|^*$  und dann in die obenstehenden Ungleichungen für  $|D_{\beta_j} R_i|^*$  ein. Dabei benutzen wir die Definition

$$\begin{aligned}
S_1 & := e^{-\alpha_j^s \omega_j} |Q_j^s d_j^s| + e^{-\alpha_j^u \omega_j} |Q_j^u d_j^u| + |d_j|_1 (e^{-\alpha_j^s \omega_j} + e^{-\alpha_j^u \omega_j}) + e^{-2\alpha_j \omega_j} S_0 + \\
& \quad e^{-\alpha_j \omega_j} |d_j|_1 \left( \|\mathbf{d}\| + \sup_{k \in \mathbb{Z}} (r_k^s + r_k^u + e^{-\alpha_k^s \omega_k} + e^{-\alpha_k^u \omega_k}) \right)
\end{aligned}$$

von  $S_1$  und erhalten zunächst für  $i \neq j$ :

$$\begin{aligned}
|D_{\beta_j} R_i^s| & \leq e^{-\alpha_i^s \omega_i} S_1 + e^{-\alpha_i^u \omega_i} e^{-\alpha_j \omega_j} r_i^s |d_j|_1 \\
|D_{\beta_j} R_i^u| & \leq e^{-\alpha_i^u \omega_i} S_1 + e^{-\alpha_i^s \omega_i} e^{-\alpha_j \omega_j} r_i^u |d_j|_1.
\end{aligned}$$

Für  $i = j$  bekommen wir dagegen die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
|R_j^s|_1 & \leq e^{-\alpha_j^s \omega_j} (S_0 + S_1 + |d_j|_1 \|\mathbf{d}\|) + r_j^s |d_j^u|_1 + r_i^u |d_i^s|_1 \\
|R_j^u|_1 & \leq e^{-\alpha_j^u \omega_j} (S_0 + S_1 + |d_j|_1 \|\mathbf{d}\|) + r_j^s |d_j^u|_1 + r_i^s |d_i^s|_1.
\end{aligned}$$

Damit ist auch die letzte Behauptung des Lemmas bewiesen.  $\square$

Zuletzt werden wir noch Abschätzungen für die Ableitungen nach den System-Parametern  $\mu$  bereit stellen. Dazu definieren wir  $\omega := \inf_{i \in \mathbb{Z}} \omega_i$  und  $\alpha := \min_{1 \leq i \leq N} \alpha_i$ .

**Lemma 3.22** Für die Ableitungen nach  $\mu$  gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |D_\mu J_i|, |D_{(\mu, \beta_j)} J_i| &\leq e^{-3\alpha\omega} \\ |D_\mu R_i|, |D_{(\mu, \beta_j)} R_i| &\leq e^{-2\alpha\omega} \end{aligned}$$

gleichmäßig in  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis.** Zunächst folgt aus Lemma 3.16 und (3.32), daß die Lösungen zusammen mit ihren Ableitungen nach  $(\beta, \mu)$  in  $\mathcal{V}$  liegen. Außerdem können die Ableitungen der Dichotomien nach Lemma 1.1(ii) dank der vorgenommenen Koordinatentransformationen durch  $e^{-\alpha\omega}$  abgeschätzt werden. Die Behauptung folgt dann leicht aus den Gleichungen (3.34), (3.37) und (3.36). Die Details seien hier übergangen.  $\square$

Damit können wir schließlich den folgenden Satz beweisen.

**Satz 3** Wir können den Sprung  $\Xi_i(\omega, \mu)$  in der Form

$$\begin{aligned} \Xi_i(\omega, \mu) &= \xi_i(\omega, \mu) + \xi_i^\infty(\mu) \\ &= \langle \Psi_i(\mu, \omega_{i+1}), q_{i+1}(-\omega_{i+1}) + \hat{u}_{i+1}(\mu, -\omega_{i+1}) \rangle - \\ &\quad \langle \Psi_i(\mu, -\omega_i), q_{i-1}(\omega_i) + u_{i-1}(\mu, \omega_i) \rangle + \xi_i^\infty(\mu) + \tilde{\mathcal{R}}_i(\omega, \mu). \end{aligned}$$

darstellen. Für den Restterm  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  und seine Ableitungen gelten die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{R}}_i| &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} R_{i+1}^u + e^{-\alpha_i^s \omega_i} R_i^s + |J_i^u| + |J_i^s| \\ |D_{\beta_j} \tilde{\mathcal{R}}_i| &\leq e^{-\alpha_{i+1}^u \omega_{i+1}} |D_{\beta_j} R_{i+1}^u|^* + e^{-\alpha_i^s \omega_i} |D_{\beta_j} R_i^s|^* + |D_{\beta_j} J_i^u|^* + |D_{\beta_j} J_i^s|^* \\ |D_\mu \tilde{\mathcal{R}}_i|, |D_\mu D_{\beta_j} \tilde{\mathcal{R}}_i| &\leq e^{-3\alpha\omega} \end{aligned}$$

**Beweis.** Die Darstellung des Sprungs  $\xi_i$  folgt aus Bemerkung 3.8 und Gleichung (3.20). Die Abschätzungen des Restterms  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  folgen aus den Definitionen der Integralterme  $J_i$  und der Restterme  $R_i$ . Vergleiche außerdem Lemma 3.22 für die Ableitungen von  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  nach den Parametern  $\mu$ .  $\square$

**Bemerkung 3.23** Die Fehlerabschätzungen für die im Satz angegebenen Größen  $R_i$  und  $J_i$  finden sich in den Lemmata 3.20 und 3.21.

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen.

**Bemerkung 3.24** Bis hierher war vorausgesetzt worden, daß  $\omega_i < \infty$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$  galt. Tatsächlich existiert der Limes  $\omega_j \rightarrow \infty$  aller eingeführter Größen. Dies sieht man leicht anhand der Integralgleichungen (3.34) und der eingeführten Normen, denn die instabilen Koordinaten  $w_j^u$  für  $t \geq 0$  beziehungsweise die stabilen Anteile  $\hat{w}_{j-1}^s$  für  $t \leq 0$  der Lösungen  $(\hat{w}_{j-1}, w_j)$  konvergieren gegen Null für  $\omega_j \rightarrow \infty$ . Außerdem gelten alle bewiesenen Abschätzungen auch im Limes.

**Bemerkung 3.25** Die Gleichungen (3.16) - beziehungsweise (3.19) und (3.19) - und daher auch die Verzweigungsgleichungen sind äquivariant unter dem Links-Shift  $\sigma_N$  um  $N$  Indizes. Dabei ist  $N$  die Anzahl der heteroklinen Orbits  $q_i(t)$  entlang derer man Lösungen sucht. Insbesondere im Fall eines homoklinen Orbits  $q_0(t)$  sind die Verzweigungsgleichungen äquivariant unter dem üblichen Shift  $\sigma$ , denn dann ist ja  $N = 1$ . Für die Restterme  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  folgt aus der Äquivarianz unter dem Shift  $\sigma_N$

$$\tilde{\mathcal{R}}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu) = \tilde{\mathcal{R}}_{i-N}(\sigma_N(\boldsymbol{\omega}), \mu)$$

und daher für die Differenz zweier Restterme die Identität

$$(3.59) \quad \tilde{\mathcal{R}}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu) - \tilde{\mathcal{R}}_{i+kN}(\boldsymbol{\omega}, \mu) = \tilde{\mathcal{R}}_i(\boldsymbol{\omega}, \mu) - \tilde{\mathcal{R}}_i(\sigma_N^k(\boldsymbol{\omega}), \mu)$$

für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ . Ferner sind Lösungen  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\omega}, \mu)$  von (3.16) mit  $\sigma_N^k(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}$  periodisch; sie umlaufen den heteroklinen Zyklus bestehend aus den  $N$  verschiedenen Orbits  $q_i(t)$  insgesamt  $k$ -mal, bevor sie sich schließen. Es genügt daher, die ersten  $kN$  Gleichungen modulo  $kN$  zu lösen, um derartige  $k$ -periodische Lösungen zu finden. Dies wird in den Anwendungen in Abschnitt 4.2 ausgenutzt.

### 3.4 Diskussion

In diesem Kapitel haben wir Lins Methode so modifiziert, daß zum einen auch Verzweigungsprobleme mit höherer Kodimension behandelt und zum anderen brauchbare Fehlerabschätzungen der Restterme bewiesen werden können. Im wesentlichen erreichten wir diese Ziele durch die strikte Trennung der zwei Komponenten der Verzweigungsgleichungen, nämlich des Separierens der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten und des Einflusses der Rückkehrzeiten  $\boldsymbol{\omega}$ . Um diese Trennung durchführen zu können, waren wir gezwungen, dem Problem angepaßte Koordinaten zu wählen. Allein dieser Zwang verhindert die Anwendung auf semilineare parabolische Gleichungen. Denn bereits der Koordinatenwechsel, der zu  $W_{loc}^s(p_0) \subset RP_0^s$  führt, wird die semilineare in eine quasilineare Gleichung transformieren. Vielleicht kann man trotz der hier sichtbar werdenden technischen Probleme diese Methode auch auf partielle Differentialgleichungen anwenden.

## 4. Anwendungen der geometrischen und analytischen Methode

### 4.1 Verzweigungen mit Kodimension eins

In diesem Abschnitt werden wir die Zentrumsmanifoldtheorie anwenden, um Bifurkationen mit Kodimension eins auf gewisse semilineare parabolische Gleichungen zu verallgemeinern.

Wir betrachten also die parabolische Differentialgleichung

$$(4.1) \quad \dot{x} + Ax = f(x)$$

unter der folgenden Voraussetzung (A).

(A) Es sei  $A$  sektoriell,  $f : X^\alpha \rightarrow X \in C^{1,\beta}$  für  $\beta > 0$  und  $f(0) = Df(0) = 0$ . Ferner sei  $q(t)$  ein homokliner Orbit von (4.1).

Wie in der Einleitung bemerkt, werden zur Untersuchung der Dynamik in der Nähe von homoklinen Lösungen oft Linearisierungen oder Quasilinearisierungen wie die Shilnikov-Variablen (siehe [13]) benötigt. Diese Werkzeuge stehen für unendlich-dimensionale Systeme nicht zur Verfügung. Wir werden im folgenden Lemma sehen, daß zumindest in einigen generischen Fällen Linearisierungen auf der homoklinen Zentrumsmanifoldtheorie möglich sind, obwohl diese nur in  $C^{1,\beta}$  liegt.

**Lemma 4.1** *Es sei*

$$(4.2) \quad \dot{x} + Ax = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit  $f \in C^{1,\beta}$  für  $\beta > 0$  und  $f(0) = Df(0) = 0$ . Der zugehörige Fluß heiße  $\Phi(t, x)$ . Das Spektrum von  $-A$  besteht aus einfachen Eigenwerten  $\sigma(-A) = \{\lambda^s, \lambda^u\}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda^s < 0 < \operatorname{Re} \lambda^u$  (insbesondere ist  $2 \leq n \leq 4$ ).

Dann existiert eine Abbildung  $h : U_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$  für  $\delta > 0$  klein mit  $h(0) = Dh(0) = 0$  und  $id + h$  konjugiert den Fluß  $\Phi(t, \cdot)$  mit der Linearisierung  $e^{-At}$  von (4.2).

**Beweis.** Zunächst existieren die lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit  $W_{loc}^s(0)$  und  $W_{loc}^u(0) \in C^{1,\beta}$ . Dann gibt es eine  $C^{1,\beta}$ -Abbildung  $g : U_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g(0) = Dg(0) = 0$ , so daß für den transformierten Fluß  $\hat{\Phi}_t := (id + g)^{-1} \circ \Phi_t \circ (id + g)$  der stabile und instabile Eigenraum invariant sind. Wir beachten hier, daß zwar das transformierte Vektorfeld nur noch in  $C^\beta$  ist, der transformierte Fluß  $\hat{\Phi}_t$  aber weiterhin in  $C^{1,\beta}$  liegt. Die Existenz einer Konjugation  $id + \hat{h}$  von  $e^{-A}$  und  $\hat{\Phi}(1, \cdot)$  mit  $\hat{h}(0) = D\hat{h}(0) = 0$  folgt dann aus Resultaten von Belitskii [2, Thm. A, p. 276]. Denn setze dort  $G = \Lambda = F'(0) := e^{-A}$  und  $F := \hat{\Phi}(1, \cdot)$ . Beachte außerdem, daß in der Notation von [2] mit  $\Gamma = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  folgendes gilt (vergleiche [2, §3 ex. 2])

$$I(\Gamma, \Lambda; 1, \beta) = [e^{(\operatorname{Re} \lambda^s + \beta \operatorname{Re} \lambda^u)}, e^{(\operatorname{Re} \lambda^u + \beta \operatorname{Re} \lambda^s)}]$$



Deshalb folgt  $\operatorname{Re} \lambda^s, \operatorname{Re} \lambda^u \notin I(\Gamma, \Lambda; 1, \beta)$  und die Voraussetzungen des zitierten Satzes in [2] sind erfüllt.

Das Resultat für die Flüsse folgt nun wie in Hartman [22, IX.9]. Wir definieren

$$\operatorname{id} + \tilde{h} := \int_0^1 e^{As} \circ (\operatorname{id} + \hat{h}) \circ \hat{\Phi}(s, \cdot) ds$$

Dann ist  $\tilde{h}(0) = 0$  und  $\operatorname{id} + D\tilde{h}(0) = \int_0^1 e^{As} (\operatorname{id} + D\hat{h}(0)) D\hat{\Phi}(s, 0) ds = \operatorname{id}$ . Deshalb ist  $\operatorname{id} + \tilde{h}$  invertierbar auf  $U_\delta(0)$  für  $\delta > 0$  klein genug. Die Abbildung  $(\operatorname{id} + \tilde{h})$  ist eine Konjugation von  $e^{-At}$  und  $\hat{\Phi}(t, \cdot)$ , vergleiche [22, IX.9]. Wir erhalten durch  $(\operatorname{id} + g) \circ \tilde{h} \in C^1$  schließlich die gewünschte Konjugation von  $\Phi_t$  und  $e^{-At}$ .  $\square$

Damit können wir die für das Shilnikov-Chaos benötigten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen abschwächen. So reicht zum Beispiel  $f \in C^{1,\beta}(\mathbb{R}^n)$  aus, um unter den üblichen Generizitätsannahmen an das Vektorfeld Shilnikov-Chaos wie in [15, Thm. 2.1] nachzuweisen. Tatsächlich werden die Differenzierbarkeitsbedingungen an die Nichtlinearität  $f$  nur für die Linearisierbarkeit des Flusses um das Gleichgewicht herum gebraucht, vergleiche etwa Deng [15, Rem. (c) nach Thm. 2.1] oder Tresser [40].

Wir können daher mit Hilfe der Reduktion auf die Zentrumsmannigfaltigkeit Shilnikov-Chaos für gewisse semilineare parabolische Gleichungen beweisen. Es gilt nämlich das folgende Resultat.

**Satz 4** *Die Voraussetzung (A) sei erfüllt. Das Spektrum von  $-A$  zerfalle in  $\sigma(-A) = \sigma^{ss}(-A) \cup \{\lambda^s, \lambda^u\} \cup \sigma^{uu}(-A)$  mit  $\operatorname{Re} \sigma^{ss}(-A) < \operatorname{Re} \lambda^s < 0 < \operatorname{Re} \lambda^u < \operatorname{Re} \sigma^{uu}(-A)$ . Dabei seien  $\lambda^s$  und  $\lambda^u$  einfache Eigenwerte.  $P_0^s, P_0^c$  und  $P_0^u$  seien die zugehörigen Spektralprojektionen. Der homokline Orbit  $q(t)$  besitze exponentielle Dichotomien  $P^s(t)$  und  $P^c(t)$  für  $t \geq 0$ , sowie  $\hat{P}^u(t)$  und  $\hat{P}^c(t)$  für  $t \leq 0$  mit den üblichen Eigenschaften (2.2) und (2.3). Ferner erfüllen diese Projektionen die Gleichung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\hat{P}^u(0) \oplus \left( \mathbb{R}P^s(0) \oplus \mathbb{R}P^c(0) \right) &= X^\alpha \\ \mathbb{R}P^s(0) \oplus \left( \mathbb{R}\hat{P}^u(0) \oplus \mathbb{R}\hat{P}^c(0) \right) &= X^\alpha \end{aligned}$$

und es gelte einer der folgenden drei Annahmen.

- (i)  $\operatorname{Im} \lambda^s, \operatorname{Im} \lambda^u \neq 0$  und  $\operatorname{Re} \lambda^s \neq \operatorname{Re} \lambda^u$
- (ii)  $\operatorname{Im} \lambda^s \neq 0, \lambda^u \in \mathbb{R}$  und  $|\operatorname{Re} \lambda^s| < \lambda^u$
- (iii)  $\operatorname{Im} \lambda^u \neq 0, \lambda^s \in \mathbb{R}$  und  $|\lambda^s| > \operatorname{Re} \lambda^u$ .

Dann existiert eine Zentrumsmannigfaltigkeit  $W_{\operatorname{hom}}^c$  für (4.1) und die Resultate von Tresser [40] und Deng [15] gelten für den Fluß auf  $W_{\operatorname{hom}}^c$  und damit für das volle System (4.1). Insbesondere existieren daher Hufeisen in der Nähe des homoklinen Orbits  $q(t)$ .

## 4.2 Verzweigungen mit Kodimension zwei

### 4.2.1 Die Orbit-Flip Verzweigung

Die Orbit-Flip Verzweigung ist dadurch charakterisiert, daß für  $\mu = 0$  ein homokliner Orbit  $q(t)$  an ein hyperbolisches Gleichgewicht existiert, der in der stark stabilen - oder der stark instabilen - Mannigfaltigkeit enthalten ist. Wir wollen nun die entstehenden Verzweigungen untersuchen. Betrachte also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(4.3) \quad \dot{x} + Ax = f(x, \epsilon) \quad (x, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times M$$

mit  $f \in C^{k+4}$  für  $k \geq 2$  und  $f(0, \epsilon) = D_x f(0, 0) = 0$ . Außerdem sei  $n \geq 3$  und  $M \subset \mathbb{R}^p$  mit  $p \geq 2$  sei eine offene Umgebung der Null.

**(H1)** Das Spektrum von  $-A$  sei von der Gestalt  $\sigma(-A) = \{-\lambda^s(\epsilon)\} \cup \sigma^{ss}(-A) \cup \sigma^u(-A)$  mit  $\operatorname{Re} \sigma^{ss}(-A) < -\alpha^{ss} < -\lambda^s(\epsilon) < -\alpha^s < 0$  und  $\operatorname{Re} \sigma^u(-A) > 0$  für alle  $\epsilon \in M$ . Ferner sei  $-\lambda^s(\epsilon)$  ein einfacher Eigenwert.

Wir wählen dann Koordinaten wie in Abschnitt 3.3. Insbesondere sind dann die zu der Spektralzerlegung von  $\sigma(-A)$  gehörenden Projektionen unabhängig von  $\epsilon$ . Wir bezeichnen diese Projektionen mit  $Q_0^s$ ,  $P_0^{ss}$  und  $P_0^u$ . Ferner sei  $P_0^s = Q_0^s + P_0^{ss}$ . Wir nehmen o.B.d.A. an, daß alle Eigenräume paarweise senkrecht aufeinander stehen. Die Spektralprojektionen sind daher insbesondere orthogonale Abbildungen. Aufgrund der Koordinatenwahl ist die lokale stabile, stark stabile und instabile Mannigfaltigkeit in dem entsprechendem Eigenraum enthalten. Weiterhin gelte

**(H2)** Es sei  $q(t)$  ein homokliner Orbit von (4.3) für  $\epsilon = 0$  mit  $q(0) \in W^{ss}(0)$ . Ferner gelte für die exponentiellen Dichotomien  $P^s(t)$  für  $t \geq 0$  und  $\hat{P}^u(t)$  für  $t \leq 0$  der Variationsgleichung  $\dot{v} + Av = D_x f(q(t), 0) v$  entlang von  $q(t)$  folgendes:

$$\mathbb{R}P^s(0) \cap \mathbb{R}\hat{P}^u(0) = \operatorname{span} \dot{q}(0).$$

Wir bezeichnen mit  $\psi(t)$  wieder die - bis auf konstante Vielfache - eindeutig bestimmte beschränkte Lösung der adjungierten Variationsgleichung; vergleiche Abschnitt 3.2. Wir setzen  $\hat{Q}_*^s(0, -\Omega) \psi(-\Omega) \neq 0$  voraus. Dabei haben wir Lemma 1.8 auf die adjungierte Variationsgleichung angewendet ( $Q_*^s(0, -\Omega)$  entspricht dort der Abbildung  $Q^s(0, -\Omega)$ ).

Die Voraussetzung über  $\psi(t)$  bedeutet, daß  $\psi(t)$  sich generisch verhält für  $t \rightarrow -\infty$ . Insbesondere ist die exponentielle Konvergenzrate von  $\psi(t)$  größer als  $-\alpha^{ss}$ . Dann können wir Lemma 3.3 anwenden und erhalten Lösungen  $q(t) + u(\epsilon, t) \in W^s(\epsilon, 0)$  für  $t \geq 0$  und  $q(t) + \hat{u}(\epsilon, t) \in W^u(\epsilon, 0)$  für  $t \leq 0$ . Die Ableitung des Sprungs  $\xi^\infty(\epsilon) = \hat{u}(\epsilon, 0) - u(\epsilon, 0)$  an der Stelle  $\epsilon = 0$  ist nach Lemma 3.3 durch das Melnikov-Integral

$$(4.4) \quad D_\epsilon \xi^\infty(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \psi(t), D_\epsilon f(q(t), 0) \right\rangle dt$$

gegeben. Es gilt dann die folgende Bemerkung.

**Bemerkung 4.2** *Es existiert ein  $v^s(\epsilon) \in \mathbb{R}Q_0^s$  mit  $v^s(\epsilon) \in C^k$  und folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} v^s(\epsilon) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda^s(\epsilon)t} (q(t) + u(\epsilon, t)) \\ |q(t) + u(\epsilon, t) - e^{-\lambda^s(\epsilon)t} v^s(\epsilon)| &\leq C e^{-\min(\alpha^{ss}, 2\lambda^s(0))t} \end{aligned}$$

*Diese Abschätzung gilt auch noch für die Ableitung nach  $t$ . Ferner ist  $v(0) = 0$ .*

**Beweis.** Die ersten Behauptungen folgen aus Lemma 1.7. Da  $u(0, \cdot) \equiv 0$  ist, liegt auch  $q(0) + u(0, 0) = q(0) \in W^{ss}(0)$  in der stark stabilen Mannigfaltigkeit für  $\epsilon = 0$ . Daher ist  $v(0) = 0$ , denn  $v(\epsilon) \in \mathbb{R}Q_0^s$  und  $W_{loc}^{ss}(\epsilon, 0) \subset \mathbb{R}Q_0^{ss}$ .  $\square$

Wir zeigen jetzt, daß für generische Vektorfelder  $f$  tatsächlich  $D_\epsilon v(0) \neq 0$  ist. Dazu definieren wir wieder exponentielle Dichotomien  $Q^s(t)$  und  $Q^{ss}(t)$  für die Linearisierung entlang des homoklinen Orbits für  $t \geq 0$  und  $\epsilon = 0$ , die die Spektralprojektionen  $Q_0^s$  und  $Q_0^{ss}$  fortsetzen. Wir können  $Q^s(0) \subset Y$  wählen, da  $\text{span } \dot{q}(0) \subset Q^{ss}(0)$  ist.

**Bemerkung 4.3** *Es sei*

$$K(t) := P(Y, Z \oplus \text{span } \dot{q}(0)) T(0, t) \cdot \begin{cases} (Q^s(t) + P^u(t)) & t \geq 0 \\ \hat{P}^s(t) & t \leq 0, \end{cases}$$

wobei  $T(t, s)$  die Fundamentallösung der Linearisierung des Vektorfelds entlang  $q(t)$  sei. Dann gilt für ein  $\nu \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q^s(0) K(t) D_\epsilon f(q(t), 0) dt = \nu \cdot D_\epsilon v^s(0).$$

Hier werden  $\mathbb{R}Q^s(0)$  und  $\mathbb{R}Q_0^s$  mit Hilfe des Skalarprodukts kanonisch mit  $\mathbb{R}$  identifiziert.

**Beweis.** Zunächst existiert das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} T(0, t) Q^s(t) D_\epsilon f(q(t), 0) dt$  wegen der Abschätzungen  $|D_\epsilon f(q(t), 0)| \leq C |q(t)| \leq C e^{-\alpha^{ss}t}$  und  $|T(0, t) Q^s(t)| \leq C e^{\alpha^s t}$ . Weiter folgt aus Lemma 3.2, daß die  $Q^s(0)$ -Komponente von  $q(0) + u(\epsilon, 0)$  durch

$$\begin{aligned} Q^s(0) (q(0) + u(\epsilon, 0)) &= Q^s(0) P(Y, Z \oplus \text{span } \dot{q}(0)) \cdot \\ &\left( \int_0^\infty T(\epsilon, 0, t) P^u(\epsilon, t) g(t, u(\epsilon, t), \epsilon) dt + \int_{-\infty}^0 T(\epsilon, 0, t) \hat{P}^s(\epsilon, t) \hat{g}(t, \hat{u}(\epsilon, t), \epsilon) dt \right) \end{aligned}$$

gegeben ist. Zum anderen ist das eindeutig bestimmte über  $Q_0^{ss}(q(0) + u(\epsilon, 0))$  liegende Element der stark stabilen Mannigfaltigkeit bei  $t = 0$  durch einen Ausdruck der Form

$$\begin{aligned} q(0) + Q_0^{ss}(0) u(\epsilon, 0) + \int_\infty^0 T(0, t) Q^s(t) \left( f\left(q(t) + w^{ss}(\epsilon, t) + h(t, Q_0^{ss}(0) u(\epsilon, 0), \epsilon), \epsilon\right) - \right. \\ \left. f(q(t), 0) - D_x f(q(t), 0) \left( w^{ss}(\epsilon, t) + h(t, Q_0^{ss}(0) u(\epsilon, 0), \epsilon) \right) \right) dt \end{aligned}$$

gegeben. Die Abbildung  $h$  erfüllt dabei  $h(t, Q^{ss}(0)u(0,0), 0) = 0$ . Ferner ist  $w^{ss}(\epsilon, t)$  der stark stabile Anteil der Lösung  $q(t) + w^{ss}(\epsilon, t) + h(t, Q^{ss}(0)u(\epsilon, 0), \epsilon)$  mit  $w^{ss}(\epsilon, 0) = Q^{ss}(0)u(\epsilon, 0)$  und es ist insbesondere  $w^{ss}(0, 0) = 0$ .

Die Ableitung der Differenz der beiden oben beschriebenen Ausdrücke nach  $\epsilon$  an der Stelle  $\epsilon = 0$  stimmt nun mit dem Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} Q^s(0)K(t)D_{\epsilon}f(q(t), 0)dt$  überein. Daher gibt der Integralterm die lineare Änderung des Abstandes von  $q(0) + u(\epsilon, 0)$  von der stark stabilen Mannigfaltigkeit bezüglich Änderungen von  $\epsilon$  an. Auf der anderen Seite haben wir in der Nähe des Gleichgewichts nach Lemma 1.7 die Darstellung

$$(4.5) \quad Q_0^s u(\epsilon, t) = e^{-\lambda^s(\epsilon)t} v^s(\epsilon) + \int_t^{\infty} e^{-\lambda^s(\epsilon)(t-\tau)} Q_0^s f(q(\tau) + u(\epsilon, \tau), \epsilon) d\tau$$

für  $t \geq \Omega$ . Wir beachten nun, daß wir  $W_{loc}^{ss}(\epsilon, 0) \subset RQ_0^{ss}$  angenommen haben. Dann ist die Ableitung des oben stehenden Terms nach  $\epsilon$  an der Stelle  $\epsilon = 0$  wegen  $v^s(0) = 0$  gegeben durch

$$Q_0^s D_{\epsilon}u(0, t) = e^{-\lambda^s(0)t} D_{\epsilon}v^s(0) + \int_t^{\infty} e^{-\lambda^s(0)(t-\tau)} Q_0^s D_x f(q(\tau), 0) Q_0^s D_{\epsilon}u(0, \tau) d\tau.$$

Ferner gilt  $Q_0^s D_{\epsilon}u(0, t) \in \text{span } Q_0^s D_{\epsilon}u(0, \Omega)$  für  $t \geq \Omega$ . Daher sind  $D_{\epsilon}v(0)$  und der Integralausdruck  $\int_{-\infty}^{\infty} Q^s(0)K(t)D_{\epsilon}f(q(t), 0)dt$  linear abhängig. Falls einer der Terme verschwindet, muß der andere Ausdruck wegen (4.5) und der Bedeutung des Integralterms ebenfalls Null sein. Damit folgt die Behauptung des Lemmas.  $\square$

Damit können wir die Voraussetzung über die Abhängigkeit der Nichtlinearität  $f$  von den Parametern  $\epsilon$  formulieren.

**(H3)** Die beiden Vektoren  $\int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi(t), D_{\epsilon}f(q(t), 0) \rangle dt$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} Q^s(0)K(t)D_{\epsilon}f(q(t), 0)dt$  seien linear unabhängig.

Wir beachten hier, daß diese Annahme generisch ist. Tatsächlich sind die Funktionale  $\int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi(t), \cdot \rangle dt$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} \langle K(t)^* Q^s(0)^*, \cdot \rangle dt$  unabhängig, denn der Kern von  $\psi(t)$  enthält nach Definition den Unterraum  $RP^s(t)$ , während  $K(t)^* Q^s(0)^*$  auf  $RQ^s(t)$  für  $t \geq 0$  nicht identisch verschwindet.

Aufgrund von Bemerkung 4.3 sind dann auch  $\int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi(t), D_{\epsilon}f(q(t), 0) \rangle dt$  und  $D_{\epsilon}v^s(0)$  linear unabhängig. Nach einer geeigneten Parametertransformation  $\mu = \mu(\epsilon)$  in  $M$  gilt daher

$$(4.6) \quad \begin{cases} \mu_1 &= v^s(\mu) \\ \mu_2 &= \xi^{\infty}(\mu). \end{cases}$$

Wegen Gleichung (4.4) und aufgrund der linearen Unabhängigkeit ist nämlich der Rangsatz in [3, Satz 5.4] anwendbar.

**Bemerkung 4.4** *Tatsächlich können wir auch direkt  $D_{\epsilon}v(0) \neq 0$  voraussetzen, denn  $\psi(t)$  operiert wie beschrieben stets auf dem Komplement der Summe  $T_{q(t)}W^s(p_0) + T_{q(t)}W^u(p_0)$*

der Tangentialräume der invarianten Mannigfaltigkeiten entlang des homoklinen Orbits. Dagegen hängt  $D_\epsilon v(0)$  nur von dem Fluß innerhalb der stabilen Mannigfaltigkeit ab. Daher sind das Melnikov Integral und die Ableitung  $D_\epsilon v(0)$  generisch linear unabhängig. Hier haben wir wieder  $RQ_0^s \subset \mathbb{R}$  identifiziert.

Bevor wir die ersten Verzweigungsgleichungen aufstellen, eine weitere Voraussetzung.

**(H4)** Es sei  $\sigma^u(A) = \{\lambda^u(\epsilon)\} \cup \sigma^{uu}(A)$  mit  $\operatorname{Re} \sigma^{uu}(A) > \alpha^{uu} > \lambda^u(\epsilon) > \alpha^u > 0$  und  $\lambda^u(\epsilon)$  sei einfach. Dann können wir erneut

$$v^u(\epsilon) := \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\lambda^u(\epsilon)t} (q(t) + \hat{u}(\epsilon, t))$$

definieren, vergleiche Lemma 1.7. Es sei  $v^u(0) \neq 0$  und  $Q_*^u(0, \Omega) \psi(\Omega) \neq 0$ , vergleiche wieder Lemma 1.8.

Nun folgt das angekündigte Lemma.

**Lemma 4.5** Die Voraussetzungen (H1) bis (H4) seien erfüllt. Ferner sei  $\lambda^u(0) < \alpha^{ss}$ . Dann erhalten wir die folgenden Verzweigungsgleichungen in den Parametern  $\mu$

$$\Xi_i(\omega, \mu) = \mu_1 c_1(\mu) e^{-2\lambda^s(\mu)\omega_i} + c_2(\mu) e^{-2\lambda^u(\mu)\omega_{i+1}} + \mu_2 + \mathcal{R}_i = 0$$

mit  $c_1(0), c_2(0) \neq 0$ . Für die Fehlerterme gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &= \tilde{\mathcal{R}}_i + O\left(e^{-2\alpha^u\omega_{i+1}}(e^{-(\alpha^{uu}-\alpha^u)\omega_{i+1}} + e^{-\min(\alpha^s, \alpha^u)\omega_{i+1}}) + \right. \\ &\quad \left. |\mu_1| e^{-2\alpha^s\omega_i}(e^{-\min(\alpha^s, \alpha^u)\omega_i} + e^{-(\alpha^{ss}-\alpha^s)\omega_i}) + e^{-\alpha^{ss}\omega_i}(e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-(\alpha^s+\alpha^u)\omega_i})\right) \\ D_{\omega_j} \mathcal{R}_i &= D_{\beta_j} \tilde{\mathcal{R}}_i + \delta_{(i+1)j} O\left(e^{-2\alpha^u\omega_{i+1}}(e^{-(\alpha^{uu}-\alpha^u)\omega_{i+1}} + e^{-\min(\alpha^s, \alpha^u)\omega_{i+1}}) + \right. \\ &\quad \left. \delta_{ij} O\left(|\mu_1| e^{-2\alpha^s\omega_i}(e^{-\min(\alpha^s, \alpha^u)\omega_i} + e^{-(\alpha^{ss}-\alpha^s)\omega_i}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (e^{-2\alpha^s\omega_i} + e^{-\alpha^{ss}\omega_i})(e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-(\alpha^s+\alpha^u)\omega_i})\right)\right) \end{aligned}$$

und für ein  $\gamma > 0$

$$D_\mu \mathcal{R}_i, D_\mu D_{\omega_j} \mathcal{R}_i = O(e^{-(2\min(\alpha^s, \alpha^u)+\gamma)\omega}).$$

**Beweis.** Betrachte die Formel für die Sprünge  $\Xi_i$  aus Satz 3. Wir müssen nur zeigen, daß wir  $\langle \psi(\mu, -\omega_i), q(\omega_i) + u(\mu, \omega_i) \rangle$  und  $\langle \psi(\mu, \omega_{i+1}), q(-\omega_{i+1}) + \hat{u}(\mu, -\omega_{i+1}) \rangle$  in der im Lemma angegebenen Form darstellen können. Zunächst können wir die Lösungen der adjungierten Gleichung wegen Lemma 1.8 wie folgt entwickeln.

$$(4.7) \begin{cases} |\psi(\mu, -\omega_i) - e^{-\lambda^s(\mu)(\omega_i-\Omega)} \hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega)| & \leq e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-(\alpha^s+\alpha^u)\omega_i} \\ |\psi(\mu, \omega_{i+1}) - e^{-\lambda^u(\mu)(\omega_{i+1}-\Omega)} Q_*^u(\mu, \Omega) \psi(\mu, \Omega)| & \leq e^{-\alpha^{uu}\omega_{i+1}} + e^{-(\alpha^s+\alpha^u)\omega_{i+1}}. \end{cases}$$

Die gleichen Abschätzungen gelten auch für die Ableitungen nach  $\mu$  und  $\omega_i$ . Aufgrund von Lemma 1.7 gilt weiterhin

$$(4.8) \begin{cases} q(\omega_i) + u(\mu, \omega_i) & = \mu_1 e^{-\lambda^s(\mu)\omega_i} + O(e^{-\alpha^{ss}\omega_i}) Q_0^{ss} + O(|\mu_1| e^{-2\alpha^s\omega_i}) \\ q(-\omega_{i+1}) + \hat{u}(\mu, -\omega_{i+1}) & = e^{-\lambda^u(\mu)\omega_{i+1}} v^u(\mu) + O(e^{-2\alpha^u(\mu)\omega_{i+1}} + e^{-\alpha^{uu}(\mu)\omega_{i+1}}) \end{cases}$$

und wieder erhält man die gleiche Abschätzung für die Ableitungen nach  $\mu$  und  $\omega_i$ . Aus (4.7) und (4.8) folgt dann

$$\begin{aligned}
& \langle \psi(\mu, -\omega_i), q(\omega_i) + u(\mu, \omega_i) \rangle \\
&= \left\langle e^{-\lambda^s(\mu)(\omega_i - \Omega)} \hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega) + O(e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\omega_i}), \right. \\
&\quad \left. \mu_1 e^{-\lambda^s(\mu)\omega_i} + O(e^{-\alpha^{ss}\omega_i}) P_0^{ss} + O(|\mu_1| e^{-2\alpha^s\omega_i}) \right\rangle \\
&= \left\langle e^{-\lambda^s(\mu)(\omega_i - \Omega)} \hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega), \mu_1 e^{-\lambda^s(\mu)\omega_i} \right\rangle + \\
&\quad O\left( (e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\omega_i}) (|\mu_1| e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-\alpha^{ss}\omega_i}) \right) + O\left( |\mu_1| e^{-2\alpha^s\omega_i} e^{-\alpha^s\omega_i} \right) \\
&= \mu_1 c_1(\mu) e^{-2\lambda^s(\mu)\omega_i} + \\
&\quad O\left( |\mu_1| e^{-2\alpha^s\omega_i} (e^{-\min(\alpha^s, \alpha^u)\omega_i} + e^{-(\alpha^{ss} - \alpha^s)\omega_i}) + e^{-\alpha^{ss}\omega_i} (e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\omega_i}) \right).
\end{aligned}$$

Beachte dabei, daß nach Lemma 1.8 und aufgrund der Orthogonalität der Spektralprojektionen die Abbildung  $\hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega)$  Werte in  $RQ_0^s$  annimmt. Nach Voraussetzung ist ferner  $c_1(\mu) \neq 0$ . Ebenso erhalten wir für den anderen Term

$$\begin{aligned}
& \langle \psi(\mu, \omega_{i+1}), q(-\omega_{i+1}) + \hat{u}(\mu, -\omega_{i+1}) \rangle \\
&= \left\langle e^{-\lambda^u(\mu)(\omega_{i+1} - \Omega)} Q_*^u(\mu, \Omega) \psi(\mu, \Omega) + O(e^{-\alpha^{uu}\omega_{i+1}} + e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\omega_{i+1}}), \right. \\
&\quad \left. e^{-\lambda^u(\mu)\omega_{i+1}} v^u(\mu) + O(e^{-2\alpha^u(\mu)\omega_{i+1}} + e^{-\alpha^{uu}(\mu)\omega_{i+1}}) \right\rangle \\
&= \left\langle e^{-\lambda^u(\mu)(\omega_{i+1} - \Omega)} Q_*^u(\mu, \Omega) \psi(\mu, \Omega), e^{-\lambda^u(\mu)\omega_{i+1}} v^u(\mu) \right\rangle + \\
&\quad O\left( e^{-\alpha^u\omega_{i+1}} (e^{-2\alpha^u\omega_{i+1}} + e^{-\alpha^{uu}\omega_{i+1}}) \right) + O\left( (e^{-\alpha^{uu}\omega_{i+1}} + e^{-(\alpha^s + \alpha^u)\omega_{i+1}}) e^{-\alpha^u\omega_{i+1}} \right) \\
&= c_2(\mu) e^{-2\lambda^u(\mu)\omega_{i+1}} + O\left( e^{-2\alpha^u\omega_{i+1}} (e^{-(\alpha^{uu} - \alpha^u)\omega_{i+1}} + e^{-\min(\alpha^s, \alpha^u)\omega_{i+1}}) \right).
\end{aligned}$$

Wieder ist nach Voraussetzung  $c_2(\mu) \neq 0$ . Die Abschätzungen für die Ableitungen verlaufen analog. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Für den Fall  $\lambda^u(0) > \lambda^{ss}(0)$  benötigen wir zusätzlich zu (H4) noch weitere Voraussetzungen.

**(H5)** Es sei  $\sigma^{ss}(A) = \{-\lambda^{ss}(\mu)\} \cup \sigma^r(A)$  mit  $\operatorname{Re} \sigma^r(A) < -\alpha^r < -\lambda^{ss}(\mu) < -\alpha^{ss}$  und  $-\lambda^{ss}(\epsilon)$  sei einfach. Dann sei  $q(0) \notin W^r(0)$  und  $\hat{Q}_*^{ss}(0, -\Omega) \psi(-\Omega) \neq 0$ . Dabei haben wir die Projektion  $P^s$  diesmal entsprechend der obenstehenden Spektralzerlegung in  $Q_0^s + Q_0^{ss} + P_0^r$  unterteilt und zugehörige exponentielle Dichotomien definiert.

Dann gilt das nächste Lemma.

**Lemma 4.6** *Die Voraussetzungen (H1) bis (H5) seien erfüllt. Ferner sei diesmal  $\lambda^u(0) > \lambda^{ss}(0)$ . Dann erhalten wir die folgenden Verzweigungsgleichungen in den Parametern  $\mu$*

$$\Xi_i(\omega, \mu) = \mu_1 \hat{c}(\mu) e^{-2\lambda^s(\mu)\omega_i} + \hat{c}_1(\mu) e^{-(\lambda^{ss}(\mu) + \lambda^{ss}(0, \hat{\mu}))\omega_i} + \hat{c}_2(\mu) e^{-2\lambda^u(\mu)\omega_{i+1}} + \mu_2 + \mathcal{R}_i = 0$$

mit  $\hat{c}(0)$ ,  $\hat{c}_1(0)$  und  $\hat{c}_2(0) \neq 0$ . Für die Fehlerterme gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_i &= \tilde{\mathcal{R}}_i + \mathcal{O}\left(e^{-2\alpha^u\omega_{i+1}}(e^{-(\alpha^{uu}-\alpha^u)\omega_{i+1}} + e^{-\alpha^s\omega_{i+1}}) + \right. \\ &\quad \left. |\mu_1|e^{-2\alpha^s\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-(\alpha^r-\alpha^s)\omega_i}) + e^{-2\alpha^{ss}\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-(\alpha^r-\alpha^{ss})\omega_i})\right) \\ D_{\omega_j}\mathcal{R}_i &= D_{\beta_j}\tilde{\mathcal{R}}_i + \delta_{(i+1)j}\mathcal{O}\left(e^{-2\alpha^u\omega_{i+1}}(e^{-(\alpha^{uu}-\alpha^u)\omega_{i+1}} + e^{-\alpha^s\omega_{i+1}})\right) + \\ &\quad \delta_{ij}\mathcal{O}\left(|\mu_1|e^{-2\alpha^s\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-(\alpha^{ss}-\alpha^s)\omega_i}) + e^{-2\alpha^{ss}\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-(\alpha^r-\alpha^{ss})\omega_i})\right)\end{aligned}$$

und des weiteren für ein  $\gamma > 0$

$$D_\mu\mathcal{R}_i, D_\mu D_{\omega_j}\mathcal{R}_i = \mathcal{O}(e^{-(2\alpha^s+\gamma)\omega}).$$

**Beweis.** Wir müssen wieder die Skalarprodukte aus Satz 3 entwickeln. Die Aussagen über den von  $\omega_{i+1}$  abhängigen Anteil folgen wie im vorherigen Lemma 4.5 und werden hier nicht nochmal wiederholt. Wir zeigen also die Behauptungen über den von  $\omega_i$  abhängenden Anteil. Aus Lemma 1.8 folgen wieder die Entwicklungen von  $\psi(\cdot)$ . Beachte, daß nach Voraussetzung  $\lambda^u(0) > \lambda^{ss}(0)$  ist. Wir erhalten

$$(4.9) \left\{ \begin{aligned} \psi(\mu, -\omega_i) &= e^{-\lambda^s(\mu)(\omega_i-\Omega)} \hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega) + \\ &e^{-\lambda^{ss}(\mu)(\omega_i-\Omega)} \hat{Q}_*^{ss}(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega) + \mathcal{O}\left(e^{-\alpha^r\omega_i} + e^{-(\alpha^s+\alpha^u)\omega_i}\right). \end{aligned} \right.$$

Aus Lemma 1.7(i) folgt weiter

$$(4.10) \left\{ \begin{aligned} q(\omega_i) + u(\mu, \omega_i) &= \mu_1 e^{-\lambda^s(\mu)\omega_i} + e^{-\lambda^{ss}(0, \hat{\mu})\omega_i} v^{ss}(\mu) + \mathcal{O}(e^{-\alpha^r\omega_i})P_0^r + \\ &\mathcal{O}\left(|\mu_1|(e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-2\alpha^s\omega_i}) + e^{-2\alpha^{ss}\omega_i}\right). \end{aligned} \right.$$

Aus (4.9) und (4.10) folgt dann

$$\begin{aligned}&\langle \psi(\mu, -\omega_i), q(\omega_i) + u(\mu, \omega_i) \rangle \\ &= \left\langle e^{-\lambda^s(\mu)(\omega_i-\Omega)} \hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega) + e^{-\lambda^{ss}(\mu)(\omega_i-\Omega)} \hat{Q}_*^{ss}(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega) + \right. \\ &\quad \left. \mathcal{O}\left(e^{-\alpha^r\omega_i} + e^{-(\alpha^s+\alpha^u)\omega_i}\right), \mu_1 e^{-\lambda^s(\mu)\omega_i} + e^{-\lambda^{ss}(0, \hat{\mu})\omega_i} v^{ss}(\mu) + \mathcal{O}(e^{-\alpha^r\omega_i})P_0^r + \right. \\ &\quad \left. \mathcal{O}\left(|\mu_1|(e^{-\alpha^{ss}\omega_i} + e^{-2\alpha^s\omega_i}) + e^{-2\alpha^{ss}(\mu)\omega_i}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-\lambda^s(\mu)(\omega_i-\Omega)} \hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega) + e^{-\lambda^{ss}(\mu)(\omega_i-\Omega)} \hat{Q}_*^{ss}(\mu, -\Omega) \psi(\mu, -\Omega), \right. \\ &\quad \left. \mu_1 e^{-\lambda^s(\mu)\omega_i} + e^{-\lambda^{ss}(0, \hat{\mu})\omega_i} v^{ss}(\mu) \right\rangle + \\ &\quad \mathcal{O}\left(\left(e^{-\alpha^r\omega_i} + e^{-(\alpha^s+\alpha^u)\omega_i}\right)(|\mu_1|e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-\alpha^{ss}\omega_i}) + \right. \\ &\quad \left. \mathcal{O}\left(|\mu_1|e^{-2\alpha^s\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-(\alpha^{ss}-\alpha^s)\omega_i}) + e^{-2\alpha^{ss}\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-2(\alpha^r-\alpha^{ss})\omega_i})\right)\right) \\ &= \mu_1 \hat{c}(\mu) e^{-2\lambda^s(\mu)\omega_i} + \hat{c}_1(\mu) e^{-(\lambda^{ss}(\mu)+\lambda^{ss}(0, \hat{\mu}))\omega_i} + \\ &\quad \mathcal{O}\left(|\mu_1|e^{-2\alpha^s\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-(\alpha^{ss}-\alpha^s)\omega_i}) + e^{-2\alpha^{ss}\omega_i}(e^{-\alpha^s\omega_i} + e^{-(\alpha^r-\alpha^{ss})\omega_i})\right).\end{aligned}$$

Hier beachten wir wieder, daß nach Lemma 1.8 die Abbildung  $\hat{Q}_*^s(\mu, -\Omega) + \hat{Q}_*^{ss}(\mu, -\Omega)$  Werte in  $R(Q_0^s + Q_0^{ss})$  annimmt. Nach Voraussetzung sind  $\hat{c}(\mu)$  und  $\hat{c}_1(\mu)$  ungleich Null. Die Abschätzungen für die Ableitungen verlaufen wieder ähnlich. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 4.7** Wir können mit der Zeittransformation  $t \mapsto \frac{\lambda^s(0)}{\lambda^s(\mu)} t = \tau$  und einer geeigneten Parametertransformation die Normierungen

$$\begin{aligned} c_1(\mu) &= 1 & c_2(0) &> 0 & \lambda^s(\mu) &= \lambda^s(0) \\ \hat{c}(\mu) &= -1 & \hat{c}_1(0) &> 0 & & \end{aligned}$$

gleichmäßig in  $\mu$  erreichen.

Wir wollen anschließend die in den beiden Lemmata erhaltenen Verzweigungsgleichungen lösen. Dazu führen wir neue Variablen ein.

**Definition.** Wir definieren mit  $\omega := \min_{i \in \mathbb{Z}} \omega_i$

$$(4.11) \quad \begin{cases} \frac{\lambda^u(\mu)}{\lambda^s(0)} := 1 + \alpha(\mu) & \frac{\lambda^{ss}(\mu) + \lambda^{ss}(0, \hat{\mu})}{2\lambda^s(0)} := 1 + \beta(\mu) \\ r := e^{-2\lambda^s(0)\omega} & a_i := e^{-2\lambda^s(0)(\omega_i - \omega)} \\ r_i := e^{-2\lambda^s(0)\omega_i} & \end{cases}$$

Dann ist insbesondere  $r_i = a_i r$  und es gilt  $a_i \in [0, 1]$ . Außerdem sei  $\alpha = \alpha(0)$  und  $\beta = \beta(0)$ . Ferner benennen wir den Vorfaktor  $c(\mu) := c_2(\mu)$  um.

Wir werden in den beiden folgenden Lemmata die Verzweigungsgleichungen und die Restterme in den neuen Variablen  $a_i$  und  $r$  angeben.

**Lemma 4.8** Die Voraussetzungen (H1) bis (H4) seien erfüllt. Ferner sei  $\lambda^u(0) < \alpha^{ss}$ . Dann gilt

$$\Xi_i(\mathbf{a}, r, \mu) = \mu_1 a_i r + c(\mu) (a_{i+1} r)^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu) = 0$$

mit  $c(0) > 0$ . Ferner existiert ein  $\gamma > 0$ , so daß gilt

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{O}\left((a_i^{1/2} + a_{i+1}^{1/2})(\mu_1 r + r^{1+\alpha})r^\gamma\right).$$

Für  $\lambda^s(0) < \lambda^u(0)$  gelten darüberhinaus gleichmäßig in  $r > 0$  und  $a_j \in (0, 1]$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} D_{a_j} \mathcal{R}_i &= \mathcal{O}(r^\gamma (|\mu_1| r + r^{1+\alpha})) \\ D_\mu \mathcal{R}_i, D_\mu D_{a_j} \mathcal{R}_i &= \mathcal{O}(r^{1+\gamma}). \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir beachten im folgenden die Normierungen aus Bemerkung 4.7 und der obenstehenden Definition. Zuerst setzen wir die Ungleichungen aus Lemma 3.20 und 3.21 in die Abschätzungen aus Satz 3 und Lemma 4.5 ein. Die einzigen noch nicht abgeschätzten Terme sind  $r^s$  und  $r^u$ . Dies waren die Konvergenzraten der exponentiellen Dichotomien gegen die Spektralprojektionen und ihrer Zeitableitungen gegen Null. Tatsächlich können wir diese Raten durch

$$\begin{aligned} r^s = r^s(\omega_i) &\leq K (\mu_1 e^{-\alpha^s \omega_i} + e^{-\alpha^{ss} \omega_i} + e^{-(\alpha^s + \alpha^u) \omega_i}) \\ r^u = r^u(\omega_i) &\leq K e^{-\alpha^u \omega_i} \end{aligned}$$



abschätzen. Für die Konvergenz der exponentiellen Dichotomien folgt dies unmittelbar aus Lemma 1.1(iii). Um die Zeitableitungen abzuschätzen, verwenden wir wieder die Zeitskalierung  $\tau = (1+\beta)t$ . Aus dem Beweis des dritten Teils von Lemma 1.1, der Differenzierbarkeit nach dem Parameter  $\beta$  und der Ungleichung

$$\begin{aligned} |D_t D_x f(q(t) + u(\mu, t), \mu)| &\leq K (\mu_1 e^{-\alpha^s t} + e^{-\alpha^{ss} t}) \quad \text{für } t \geq \Omega \\ |D_t D_x f(q(t) + \hat{u}(\mu, t), \mu)| &\leq K e^{\alpha^u t} \quad \text{für } t \leq -\Omega \end{aligned}$$

folgen dann die obenstehenden Abschätzungen für die Ableitungen nach  $t$ . Nachdem wir auch diese Ungleichungen für  $r^s$  und  $r^u$  in die Restterme eingesetzt haben, erhalten wir nach einigen Umformungen

$$D_{\beta_j} \mathcal{R}_i = O(a_j (|\mu_1| r + r^{1+\alpha}) r^\gamma).$$

Wir müssen schließlich noch die Kettenregel anwenden

$$\frac{d}{da_j} = \frac{d\omega_j}{dr_j} \frac{dr_j}{da_j} \frac{d}{d\beta_j} = -\frac{1}{\lambda^s(\mu) a_j} \frac{d}{d\beta_j}$$

und die Behauptungen folgen nun unmittelbar.  $\square$

**Lemma 4.9** *Die Voraussetzungen (H1) bis (H5) seien erfüllt. Es sei  $\lambda^u(0) > \lambda^{ss}(0)$ . Dann gilt*

$$\Xi_i(\mathbf{a}, r, \mu) = -\mu_1 a_i r + \hat{c}_1(\mu) (a_i r)^{1+\beta(\mu)} + \hat{c}_2(\mu) (a_{i+1} r)^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu) = 0$$

mit  $\hat{c}_1(0) > 0$  und  $\hat{c}_2(0) \neq 0$ . Außerdem gilt  $\alpha(0) > \beta(0)$ . Ferner existiert ein  $\gamma > 0$ , so daß die Restterme  $\mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu)$  gleichmäßig in  $r > 0$  und  $a_j \in (0, 1]$  durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &= O\left((a_i^{1/2} + a_{i+1}^{1/2})(|\mu_1| r + r^{1+\beta}) r^\gamma\right) \\ D_{a_j} \mathcal{R}_i &= O\left(r^\gamma (|\mu_1| r + r^{1+\beta})\right) \end{aligned}$$

und

$$D_\mu \mathcal{R}_i, D_\mu D_{a_j} \mathcal{R}_i = O(r^{1+\gamma})$$

abgeschätzt werden können.

**Beweis.** Wir verfahren wie im Beweis von Lemma 4.8, nur daß wir hier die Abschätzungen natürlich in Lemma 4.6 anstelle von Lemma 4.5 einsetzen. Wieder beachten wir Bemerkung 4.7 und die obenstehende Definition. Die behaupteten Aussagen folgen dann leicht.  $\square$

Nun wollen wir die Verzweigungsgleichungen lösen.

**Satz 5** *Die Voraussetzungen (H1) bis (H4) seien erfüllt. Dann gilt:*

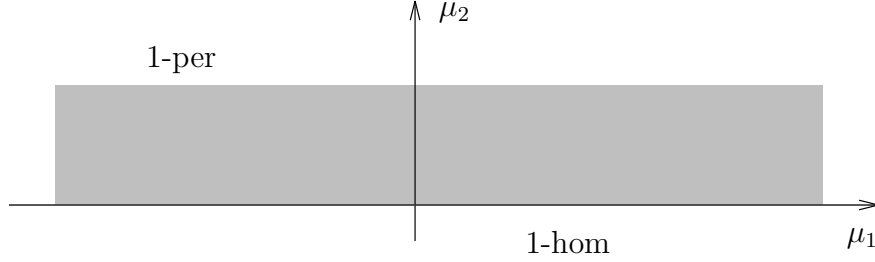


Abbildung 15: Homokline Fortsetzung (1)

(1) *Homokline Fortsetzung.* Es gelte  $\lambda^u(0) < \lambda^s(0)$ .

Dann verzweigen keine  $N$ -homokline oder  $N$ -periodischen Lösungen mit  $N \geq 2$ . Das Verzweigungsdiagramm sieht wie in Abbildung 15 aus. Für jeden Parameterwert in dem schraffierten Bereich existiert genau ein 1-periodischer Orbit.

(2) *Homokline Verdopplung.* Diesmal sei  $\lambda^s(0) < \lambda^u(0) < \alpha^{ss}$ .

Dann erhalten wir das Verzweigungsdiagramm aus Bild 16. Die Verzweigungskurven haben das asymptotische Verhalten  $\mu_2 \approx |\mu_1|^{\lambda^u(0)/(\lambda^u(0)-\lambda^s(0))}$  in den normierten Parametern  $\mu$ .

(3) *Homokline Kaskade.* Es gelte zusätzlich noch (H5) und es sei  $\lambda^{ss}(0) < \lambda^u(0)$ .

Dann bekommen wir das Diagramm aus Abbildung 17. Insbesondere existiert ein offener Bereich im Parameterraum, in dem wir Shift-Dynamik im Phasenraum finden. Die Verzweigungskurven für die Periodenverdopplung und die Falten-Linie haben in den Parametern  $\mu$  diesmal das asymptotische Verhalten  $\mu_2 \approx |\mu_1|^{\lambda^{ss}(0)/(\lambda^{ss}(0)-\lambda^s(0))}$ . Die den  $N$ -homokline Orbits entsprechenden Parameterkurven haben die Asymptotik  $\mu_2 \approx |\mu_1|^{\lambda^u(0)/(\lambda^u(0)-\lambda^s(0))}$ . Die Verzweigungsrichtung wird durch das Vorzeichen von  $\hat{c}_2(0)$  bestimmt (in Abbildung 17 ist  $\hat{c}_2(0) < 0$ ).

**Beweis.** Wir beweisen die drei Fälle der Reihe nach.

Zunächst betrachte die ‘‘Homokline Fortsetzung’’. Dann haben die Verzweigungsgleichungen nach Lemma 4.8 die Gestalt

$$\Xi_i(\mathbf{a}, r, \mu) = \mu_1 a_i r + c(\mu) (a_{i+1} r)^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu) = 0$$

mit

$$\mathcal{R}_i = O\left(\left(a_i^{1/2} + a_{i+1}^{1/2}\right)(|\mu_1|r + r^{1+\alpha})r^\gamma\right)$$

für  $i \in \mathbb{Z}$ . Wir setzen zuerst  $i = 1$  und suchen 1-periodische und 1-homokline Lösungen. Die resultierende Gleichung

$$\Xi(r, \mu) = c(\mu) r^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + O(r^{1+\alpha+\gamma}) = 0$$

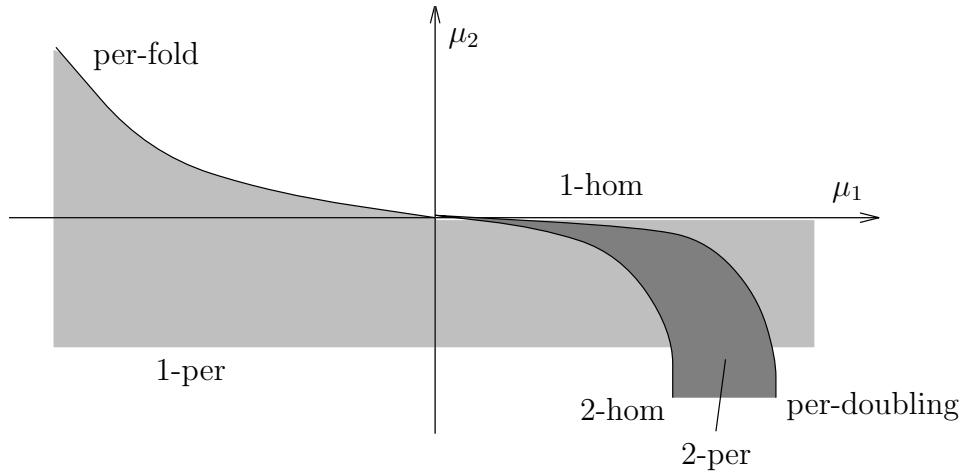


Abbildung 16: Homokline Verdopplung (2)

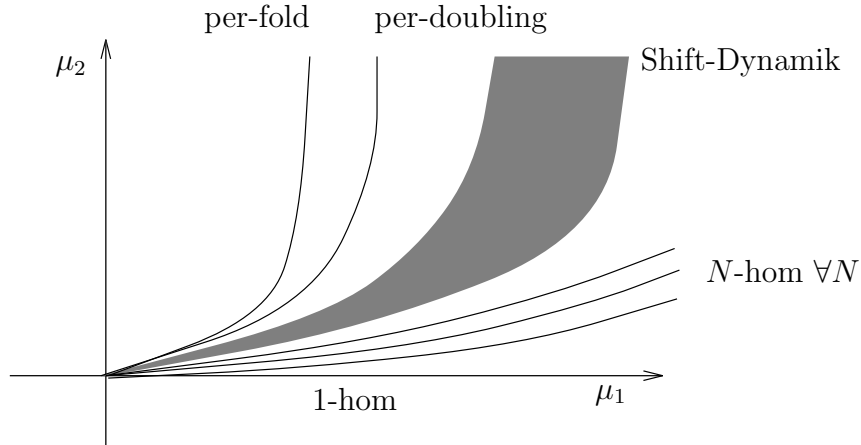


Abbildung 17: Homokline Kaskade (3)

können wir mit dem Satz über implizite Funktionen nach  $\mu_2$  auflösen. Beachte hierbei, daß nach Voraussetzung  $\alpha(\mu) < 0$  gleichmäßig in  $\mu$  ist. Deshalb erhalten wir das Diagramm 15 zumindest für die einmal umlaufenden Lösungen. Anschließend betrachten wir Lösungen mit mehr als zwei Umläufen. Wir ziehen dann die erste und zweite Gleichung voneinander ab und erhalten als Resultat (beachte  $a_0 = 1$ )

$$\Xi_0(a_1, r, \mu) - \Xi_1(a_1, r, \mu) = c(\mu) r^{1+\alpha(\mu)} (1 - a_1^{1+\alpha(\mu)}) + O(r^{1+\alpha+\gamma}) = 0.$$

Nun multiplizieren wir mit  $r^{-(1+\alpha(\mu))}$  durch und erhalten schließlich

$$c(\mu) (1 - a_1^{1+\alpha(\mu)}) + O(r^\gamma) = 0.$$

Diese Gleichung ist wegen  $c(0) > 0$  nur durch  $a_1 = 1$  lösbar. Analog erhalten wir  $a_i = 1$  für alle  $i$  und damit existieren nur Lösungen mit einem Umlauf nach Bemerkung 3.25. Dabei ist wichtig, daß der Restterm  $O$  gleichmäßig in  $i \in \mathbb{Z}$  abgeschätzt wurde. Damit ist die

erste Behauptung bereits bewiesen.

Als nächstes betrachten wir die ‘‘Homokline Verdopplung’’. Wieder suchen wir zuerst die 1-periodischen Orbits. Die zugehörige Gleichung ist

$$\mu_1 r + c(\mu) r^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}(\mathbf{a}, r, \mu) = 0,$$

die wir wieder nach  $\mu_2$  auflösen. Die Lösung  $\mu_2^*(\mu_1, r)$  leiten wir nach  $r$  ab und erhalten

$$\frac{d\mu_2^*}{dr} \left( (1 + O(r^{1+\gamma}(|\mu_1| + r^\alpha))) \right) = \mu_1 + (1 + \alpha(\mu)) c(\mu) r^{\alpha(\mu)} + O(r^\gamma(|\mu_1| + r^\alpha)).$$

Daher verschwindet  $\frac{d\mu_2^*}{dr}$  entlang der Kurve

$$\mu_1 = -(1 + \alpha(\mu)) c(\mu) r^{\alpha(\mu)} + O(r^{\alpha+\gamma})$$

und wir erhalten für die asymptotische Form der Falte schließlich für ein  $C \neq 0$

$$\mu_2 \approx |\mu_1|^{\frac{1+\alpha(0)}{\alpha(0)}}.$$

Anschließend betrachten wir Orbits mit zwei Umläufen. Die entsprechenden Gleichungen sind

$$(4.12) \quad \begin{cases} \Xi_0(a, r, \mu) = \mu_1 r + c(\mu) a^{1+\alpha(\mu)} r^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_0(a, r, \mu) = 0 \\ \Xi_1(a, r, \mu) = \mu_1 a r + c(\mu) r^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_1(a, r, \mu) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen wir gleichmäßig in  $a \in [0, 1]$  lösen. Die erste Gleichung können wir erneut nach  $\mu_2$  auflösen. Anschließend subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander

$$\mu_1 (1 - a) r + c(\mu) (a^{1+\alpha(\mu)} - 1) r^{1+\alpha(\mu)} + \mathcal{R}_0(a, r, \mu) - \mathcal{R}_1(a, r, \mu) = 0$$

und dividieren diese resultierende Gleichung durch  $(1 - a)r$ . Dabei beachten wir, daß nach Gleichung (3.59) in Bemerkung 3.25 und der Abschätzung von  $D_a \mathcal{R}$  in Lemma 4.8 folgendes gilt

$$\mathcal{R}_0(a, r, \mu) - \mathcal{R}_1(a, r, \mu) = (1 - a) O(r^\gamma(|\mu_1| r + r^{1+\alpha})).$$

Deshalb erhalten wir die Gleichung

$$\mu_1 - c(\mu) \frac{1 - a^{1+\alpha(\mu)}}{1 - a} r^{\alpha(\mu)} + O(r^\gamma(|\mu_1| + r^\alpha)) = 0,$$

die wir wegen der Stetigkeit des Ausdrucks  $\frac{1 - a^{1+\alpha(\mu)}}{1 - a} \rightarrow 1 + \alpha(\mu)$  für  $a \rightarrow 1$  und der Abschätzung für  $D_\mu \mathcal{R}$  nach  $\mu_1$  auflösen können. Dabei beachten wir

$$\frac{d}{d\mu} \left( \frac{1 - a^{1+\alpha(\mu)}}{1 - a} \right) = -\frac{1}{1 - a} \alpha'(\mu) a^{1+\alpha(\mu)} \ln a \rightarrow -\alpha'(\mu)$$

für  $a \rightarrow 1$ . Daher ist dieser Vorfaktor stetig differenzierbar für  $a \in [0, 1]$ . Damit erhalten wir 2-homokline Lösungen für  $a = 0$  und einen differenzierbaren zwei-parametrischen Zweig

bestehend aus 2-periodischen Lösungen für  $a \in (0, 1)$  und  $r > 0$ .

Zuletzt untersuchen wir die ‘‘Homokline Kaskade’’. Die Verzweigungsgleichungen sind von der Form

$$(4.13) \quad \Xi_i(\mathbf{a}, r, \mu) = -\mu_1 a_i r + \hat{c}_1(\mu) (a_i r)^{1+\beta(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu) = 0$$

und entkoppeln daher in niedrigster Ordnung. Hier haben wir den Term  $\hat{c}_2(\mu) (a_{i+1} r)^{1+\alpha(\mu)}$  wegen  $\alpha(0) > \beta(0)$  in den Fehlerterm hineingesteckt. Die periodischen Lösungen mit einem oder zwei Umläufen erhalten wir mit den gleichen Methoden wie im zweiten Fall. Dies sei hier nicht weiter ausgeführt. Wir beweisen nun die Existenz von Shift-Dynamik. Dazu wählen wir diesmal die gleichen Koordinaten wie in (4.11) allerdings mit dem Unterschied, daß  $\omega$  in der Definition von  $r$  nicht notwendigerweise das Minimum der Variablen  $\omega_i$  sein muß. Mit anderen Worten wählen wir zunächst die Variablen  $r$  und  $a_i$  mit  $i \in \mathbb{Z}$  unabhängig voneinander. Die Abschätzungen bleiben davon unberührt. Wir lösen jetzt zunächst die Gleichung

$$(\mu_1, \mu_2) = (\hat{c}_1(\mu) r^{\beta(\mu)}, b \hat{c}_1(\mu) r^{1+\beta(\mu)})$$

nach  $(\mu_1, \mu_2)$  auf. Dies ist möglich, da wir die rechte Seite für  $r < 0$  stetig durch Null fortsetzen können und wegen

$$\frac{d}{d\mu} r^{\beta(\mu)} = \frac{d\beta(\mu)}{d\mu} r^{\beta(\mu)} \ln r = O(r^{\beta(\mu)-\delta})$$

für jedes  $\delta > 0$ . Deshalb erhalten wir stetige Lösungen  $(\mu_1^*, \mu_2^*)(b, r)$ , die sogar differenzierbar für  $r > 0$  sind. Anschließend setzen wir  $(\mu_1^*, \mu_2^*)(b, r)$  für  $(\mu_1, \mu_2)$  in Gleichung (4.13) ein, wobei wir  $\beta(\mu^*(b, r))$  mit  $\beta(b, r)$  bezeichnen. Dann folgt

$$\begin{aligned} & -\mu_1 a_i r + \hat{c}_1(\mu) (a_i r)^{1+\beta(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu) \\ &= -\hat{c}_1(b, r) a_i r^{1+\beta(b, r)} + \hat{c}_1(b, r) a_i^{1+\beta(b, r)} r^{1+\beta(b, r)} + b \hat{c}_1(b, r) r^{1+\beta(b, r)} + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu) \\ &= \hat{c}_1(b, r) r^{1+\beta(b, r)} \left( a_i^{1+\beta(b, r)} - a_i + b + O(r^\gamma) \right). \end{aligned}$$

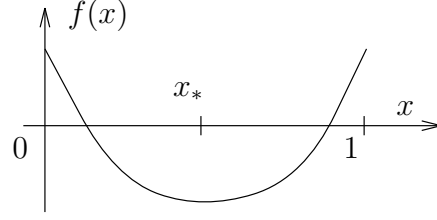
Es ist also ausreichend, die folgenden Gleichungen zu lösen.

$$(4.14) \quad a_i^{1+\beta(b, r)} - a_i + b + O(r^\gamma) = 0,$$

wobei der O-Term stetig in  $r$  und  $b$  ist. Außerdem gilt für  $a_j \geq \delta > 0$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$  die Abschätzung  $D_{\mathbf{a}}O = O(r^\gamma)$ . Dies folgt aus Lemma 4.9. Insbesondere können wir den O-Term für  $r \leq 0$  differenzierbar durch Null fortsetzen, sofern nur die Variablen  $a_j$  von Null weg beschränkt sind. Wir betrachten (4.14) für  $r = 0$ . Dann sind die nunmehr vollständig entkoppelten Gleichungen von der Gestalt  $f(x) = 0$  mit

Dann hat die Funktion  $f$  die Eigenschaft  $f(0) = f(1) = b$  und es existiert ein eindeutiges Minimum  $x_* = (1 + \beta(b, 0))^{-\frac{1}{\beta(b, 0)}} \in (0, 1)$  von  $f$  mit Funktionswert  $f(x_*) = b - \beta(b, 0) (1 +$

$$f(x) = x^{1+\beta(b,0)} - x + b$$



$\beta(b,0)^{-(1+\frac{1}{\beta(b,0)})}$ . Ferner ist  $f'(x) \neq 0$  für  $x \neq x_*$  und  $x \in (0,1)$ . Wir wählen jetzt  $b$  wie folgt

$$(4.15) \quad b \in (\eta_0, \eta_1),$$

mit  $\eta_1 := \min_{\mu} \left( \beta(\mu) (1 + \beta(\mu))^{-(1+\frac{1}{\beta(\mu)})} \right)$  und  $\eta_1 > \eta_0 > 0$ . Insbesondere ist dann das Intervall  $(\eta_0, \eta_1)$  nicht leer. Außerdem besitzt  $f$  dann gleichmäßig in  $b \in (\eta_0, \eta_1)$  genau zwei Nullstellen  $x_0(b)$  und  $x_1(b)$  im Intervall  $[0,1]$ . Die Nullstellen erfüllen  $f'(x_0(b)), f'(x_1(b)) \neq 0$  und sie liegen tatsächlich in einem Intervall  $[\hat{\eta}, 1 - \hat{\eta}]$  für ein  $\hat{\eta} = \hat{\eta}(\eta_0, \eta_1) > 0$ .

Es sei jetzt

$$\Sigma := \{ \mathbf{s} = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}} / s_k \in \{0,1\} \}$$

und der Shift  $\sigma$  operiere wie üblich durch Linkstranslation der Elemente  $s_k$  auf  $\Sigma$ . Für jede Folge  $\mathbf{s} \in \Sigma$  lösen wir jetzt das Gleichungssystem (4.14)

$$\begin{aligned} f(a_i, b) + O(r^\gamma) &= 0 \\ a_i(0) &= x_{s_i}(b) \end{aligned}$$

gleichmäßig in  $b$  nach  $\mathbf{a} = (a_i)$  auf, wobei (4.15) erfüllt sei. Wegen der obenstehenden Bemerkung über die Differenzierbarkeit des Restterms und der Eigenschaften von  $f$  können wir nämlich den Satz über implizite Funktionen anwenden. Das Lösungsintervall für  $r$  ist dabei unabhängig von  $\mathbf{s}$ , da die Restterme gleichmäßig Lipschitzstetig in  $\mathbf{a}$  sind. Für festes  $r > 0$  und  $b \in (\eta_0, \eta_1)$  erhalten wir also eine Abbildung

$$\begin{aligned} S: \Sigma &\rightarrow S(\Sigma) \subset \mathbb{R}^n \\ \mathbf{s} &\mapsto v(\boldsymbol{\omega}(b, r, \mathbf{s}), \mu^*(b, r); 0). \end{aligned}$$

Die Zuordnung  $\mathbf{a}^*(\mathbf{s}) \mapsto \mathbf{s}$  ist bijektiv und stetig in der üblichen Norm auf  $\Sigma$ , also ein Homöomorphismus. Aus [29, Lemma 3.4] folgt außerdem, daß die Abbildung

$$\mathbf{a} \mapsto v(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}), \mu, 0)$$

stetig ist. Deshalb ist  $S$  ein Homöomorphismus von  $\Sigma$  auf  $S(\Sigma)$  für alle  $(r, b)$  im Definitionsbereich. Daß die Zuordnung  $S$  schließlich die Poincaré-Abbildung und den Shift  $\sigma$  konjugiert, folgt aus der Äquivarianzaussage von Bemerkung 3.25 und nach Konstruktion. Damit ist die Aussage über die Existenz von Shift-Dynamik bewiesen. Zuletzt beweisen wir die Existenz von  $N$ -homoklinen Lösungen für jedes  $N \in \mathbb{N}$ .  $N$ -homokline Orbits erhält

man für  $a_0 = 0$  und  $a_i \neq 0$  für  $1 \leq i \leq N - 1$ . Die zugehörigen Gleichungen (4.13) lauten daher in diesem Fall

$$(4.16) \quad \begin{cases} \hat{c}_2(\mu) (a_1 r)^{1+\alpha(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_0(\mathbf{a}, r, \mu) = 0 \\ -\mu_1 a_i r + \hat{c}_1(\mu) (a_i r)^{1+\beta(\mu)} + \mu_2 + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu) = 0 \end{cases}$$

für  $1 \leq i \leq N - 1$ . Hier haben wir wieder in der zweiten Gleichung den von  $a_{i+1}$  abhängigen Term durch den Fehlerterm abgeschätzt. Wir lösen die erste Gleichung wieder mit Satz über implizite Funktionen nach  $\mu_2$  auf und ziehen anschließend die erste Gleichung von allen weiteren ab. Damit haben die restlichen  $N - 1$  Gleichungen die Form

$$-\mu_1 a_i r + \hat{c}_1(\mu) (a_i r)^{1+\beta(\mu)} + \mathcal{R}_i(\mathbf{a}, r, \mu_1) - \mathcal{R}_0(\mathbf{a}, r, \mu_1) = 0$$

für  $1 \leq i \leq N - 1$  und  $\mu_2 = \mu_2^*(\mathbf{a}, r, \mu_1)$ . Wieder lösen wir  $\mu_1 = \hat{c}_1(\mu) r^{\beta(\mu)}$  nach  $\mu_1$  auf und erhalten schließlich nach Division durch  $\hat{c}_1(r) r^{1+\beta(r)}$  die Gleichungen

$$(4.17) \quad a_i^{1+\beta(r)} - a_i + O(r^\gamma) = 0.$$

Diese Gleichungen besitzen Lösungen  $a_i = 1$  und  $r = 0$ . Außerdem folgt wie oben die Differenzierbarkeit der Restterme nach  $a_i$  bis in  $r = 0$ , solange nur die  $a_i$  für  $i = 1, \dots, N - 1$  von Null weg beschränkt sind. Insbesondere können wir die Fehlerterme bei  $a_i = 1$  differenzieren und erhalten Ableitungen

$$\left( (1 + \beta(r)) a_i^{\beta(r)} - 1 \right) \Big|_{a_i=1} = \beta(0) \neq 0.$$

Daher haben die Gleichungen (4.17) und damit auch das System (4.16) eindeutige Lösungen und wir erhalten die Existenz von Kurven im Parameterraum, denen  $N$ -homokline Orbits im Phasenraum entsprechen. Die Asymptotik folgt aus den Fehlerabschätzungen unter Beachtung der Gleichungen (3.39) und (3.41). Wir können (in der Notation von Abschnitt 3.3.2) stets  $|a_1^u|$  durch  $C e^{-\alpha^u \omega_1}$  abschätzen und erhalten dann für  $J^u$  die Abschätzung  $|J^u| \leq C e^{-(2\alpha^u + \gamma)\omega_1}$ . Mit Hilfe dieser Ungleichungen zeigen wir leicht das angegebene asymptotische Verhalten.

Damit ist der Satz bewiesen. □

**Bemerkung 4.10** *Wir haben nicht bewiesen, daß die Parameterkurven der 2-periodischen Lösungen im Parameterraum zwischen den Kurven der homoklinen und der Periodenverdopplung liegen. Tatsächlich ist es aber möglich, dies zu zeigen.*

**Bemerkung 4.11** (i) *Mit Satz 5 sind alle generischen Fälle der Orbit-Flip Bifurkation untersucht.*

- (ii) Man beachte, daß die Bedingung  $\lambda^u(0) = \lambda^{ss}(0)$ , die ja die Unterscheidung in die einzelnen Fälle von Satz 5 ermöglichte, eine höhere Resonanzbedingung ähnlich zu der aus [7] bekannten Bedingung  $\lambda^u(0) = \lambda^s(0)$  darstellt. Zwar sind die Resultate aus [7] hier natürlich nicht anwendbar, trotzdem erklären sie zu einem gewissen Grad die Bedingung  $\lambda^u(0) = \lambda^{ss}(0)$ .
- (iii) Im zweiten Fall (homokline Verdopplung) braucht der homokline Orbit  $q_0(t)$  für  $\mu = 0$  nicht entlang der prinzipalen Richtung der stark stabilen Mannigfaltigkeit verlaufen. Bei der homoklinen Kaskade allerdings muß  $q_0(t)$  entlang der prinzipalen stark stabilen Richtung gegen das Gleichgewicht konvergieren. Darüberhinaus muß diese führende Richtung reell sein. Dies ist einleuchtend, denn für einen echt komplexen Eigenwert  $\lambda^{ss}$  wäre eine Bedingung für Shilnikov-Chaos erfüllt, nämlich  $|\lambda^{ss}| < \lambda^u$ ; auch wenn wir natürlich ähnlich wie in (ii) keine generische Situation erhalten, in der man Shilnikov-Chaos tatsächlich beweisen kann.
- (iv) Es sei darauf hingewiesen, daß wir für die  $N$ -homoklinen Orbits keine Eindeutigkeit bewiesen haben; es können durchaus noch andere  $N$ -homokliner Orbits verzweigen. Tatsächlich legen Resultate von Deng [16] die Vermutung nahe, daß die hier erhaltene Liste  $N$ -homokliner Orbits nicht vollständig ist.

#### 4.2.2 Die resonante Verzweigung

Die resonante Verzweigung ist dadurch charakterisiert, daß die führenden Eigenwerte  $-\lambda^s(\mu)$  und  $\lambda^u(\mu)$  für  $\mu = 0$  betragsmäßig gleich sind; es gilt also  $\lambda^s(0) = \lambda^u(0)$ . Diese Verzweigung wurde in [7] gelöst. Für generische Vektorfelder existiert nun eine zweidimensionale homokline Zentrumsmannigfaltigkeit  $W_{hom}^c$ , in der alle Verzweigungen stattfinden. Diese Mannigfaltigkeit kann homöomorph zu einem Kreisring (orientierbar) oder zu einem Möbiusband (nicht orientierbar) sein. Insbesondere können daher, wie in der Einleitung angekündigt, keine  $N$ -periodischen oder  $N$ -homoklinen Orbits verzweigen, wobei  $N > 1$  im orientierbaren und  $N > 2$  im nicht orientierbaren Fall ist. Dies konnte in [7] nicht nachgewiesen werden. Das gleiche Resultat wurde in [4] gezeigt, ein schwächeres Ergebnis ist in [28, Thm. I] zu finden.

Mit Hilfe der Zentrumsmannigfaltigkeit ist es außerdem möglich, die Stabilität der verzweigenden Orbits zu untersuchen. Denn in  $W_{hom}^c$  können wir linearisieren und haben dann nur noch einen Floquet-Exponenten zu berechnen. Dies wird hier aber nicht weiter ausgeführt.

#### 4.2.3 Verzweigungen mit nichthyperbolischen Gleichgewichten

Verzweigungen mit nichthyperbolischen Gleichgewichten können mit Hilfe der Zentrumsmannigfaltigkeit zumindest in einigen Fällen auf semilineare parabolische Systeme erweitert werden.

Als Beispiel sei der Fall behandelt, in dem ein homokliner Orbit an ein Gleichgewicht  $p_0$



mit einem Eigenwert 0 existiert. Generisch wird das Gleichgewicht in einer saddle-node Bifurkation verzweigen. Dieses Problem mit Kodimension zwei wurde von Chow und Lin [9] und von Deng [14] untersucht.

Es sei zunächst  $q_0 \in W^c(p_0) \cap W^u(p_0)$ . Dann existiert für generische Vektorfelder eine  $(n + 1)$ -dimensionale homokline Zentrums-instabile Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  mit  $n = \dim W_{loc}^u(p_0)$ . Da der größte Eigenwert Null ist, ist dann  $W_{hom}^{cu} \in C^k$ , sofern die Nichtlinearität  $f \in C^{k,\beta}$  für  $\beta > 0$  ist. In  $W_{hom}^{cu}$  können daher die Resultate aus [9] und [14] angewendet werden, sofern nur  $k$  hinreichend groß ist. Für den verbliebenen Fall  $q_0 \in W^s(p_0) \cap W^c(p_0)$  geht dieses Argument fehl. Aber falls genügend große Spektrallücken vorhanden sind, ist die Mannigfaltigkeit  $W_{hom}^{cu}$  wieder hinreichend oft differenzierbar. Es sei erwähnt, daß Inertialmannigfaltigkeiten hier oft keine Hilfe bieten, da sie im allgemeinen nur  $C^1$  sind (unabhängig von der Größe der Spektrallücken).

Im allgemeinen wird in diesen Verzweigungsfällen jedenfalls eine zweidimensionale Zentrumsmanigfaltigkeit  $W_{hom}^c$  existieren. Mit ihrer Hilfe sehen wir leicht, daß keine  $N$ -periodischen oder  $N$ -homoklinen Lösungen für  $N \geq 2$  existieren können. Denn in  $W_{hom}^c$  ist das Vektorfeld eine Expansion (beziehungsweise eine Kontraktion im Fall  $q_0 \in W^s(p_0) \cap W^c(p_0)$ ). Außerdem erhalten wir sofort die Eindeutigkeit von heteroklinen Lösungen, die das Gleichgewicht und verzweigende 1-periodische Orbits verbinden; die instabile Mannigfaltigkeit hat ja Dimension eins. Diese Eindeutigkeit wurde mit größerem Aufwand in [30, Thm. 6.1] gezeigt.

# Literatur

- [1] V. I. Arnol'd. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- [2] G. R. Belitskii. Functional equations and conjugacy of local diffeomorphisms of a finite smoothness class. *Funct. Anal. Appl.*, 7:268–277, 1973.
- [3] T. Bröcker and K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [4] P. Brunovský, 1991. personal communication.
- [5] A. Burchard, B. Deng, and K. Lu. Smooth conjugacy of centre manifolds. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 120A:61–77, 1992.
- [6] S.-N. Chow and B. Deng. Bifurcation of a unique periodic orbit from a homoclinic orbit in infinite-dimensional systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 312:539–587, 1989.
- [7] S.-N. Chow, B. Deng, and B. Fiedler. Homoclinic bifurcation with resonant eigenvalues. *J. Dyn. & Diff. Eqs.*, 2:177–244, 1990.
- [8] S.-N. Chow and J. K. Hale. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer, New-York, 1982.
- [9] S.-N. Chow and X. B. Lin. Bifurcation of a homoclinic orbit with a saddle-node equilibrium. *Diff. Integr. Eq.*, 3:435–466, 1990.
- [10] S. N. Chow, X. B. Lin, and K. Lu. Smooth invariant foliations in infinite dimensional spaces. *J. Diff. Eq.*, 94:266–291, 1991.
- [11] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. MacGraw-Hill, New York, 1955.
- [12] W. A. Coppel. *Dichotomies in Stability Theory*, volume 629 of *Lect. Notes in Math.* Springer, Berlin, 1978.
- [13] B. Deng. The shilnikov problem, exponential expansion, strong  $\lambda$ -lemma,  $c^1$ -linearization and homoclinic bifurcation. *J. Diff. Eq.*, 79:189–231, 1989.
- [14] B. Deng. Homoclinic bifurcations with nonhyperbolic equilibria. *SIAM J. Math. Anal.*, 21:693–720, 1990.
- [15] B. Deng. On shilnikov's homoclinic-saddle-focus theorem. to appear in *J. Diff. Eq.*, 1990.
- [16] B. Deng. Homoclinic twisting bifurcations and cusp horseshoe maps. preprint, 1992.

- [17] J. Evans, N. Fenichel, and A. Feroe. Double impulse solutions in nerve axon equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 42:219–234, 1982.
- [18] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [19] J. Hadamard. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles. *Bull. Soc. Math. France*, 29:224–228, 1901.
- [20] J. K. Hale. *Asymptotic Behavior of Dissipative Dynamical Systems*, volume 25 of *Mathematical and Surveys and Monographs*. AMS, Providence, 1988.
- [21] J. K. Hale and X. B. Lin. Heteroclinic orbits for retarded functional differential equations. *J. Diff. Eq.*, 65:175–202, 1986.
- [22] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser-Verlag, Boston, 2nd edition, 1982.
- [23] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, volume 804 of *Lect. Notes Math.* Springer-Verlag, New York, 1981.
- [24] M. W. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub. *Invariant Manifolds*, volume 583 of *Lect. Notes Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [25] A. J. Homburg. Some global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields. preprint, 1993.
- [26] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [27] K. Kirchgässner. Nonlinear resonant surface waves and homoclinic bifurcation. *Adv. in Appl. Math.*, 26:135–181, 1988.
- [28] M. Kisaka, H. Kokubu, and H. Oka. Bifurcations of  $n$ -homoclinic orbits and  $n$ -periodic orbits in vector fields. preprint, 1992.
- [29] X. B. Lin. Using melnikov's method to solve shilnikov's problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 116A:295–325, 1990.
- [30] X. B. Lin. Homoclinic bifurcations with weakly expanding center manifolds. preprint, 1993.
- [31] K. J. Palmer. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *J. Diff. Eq.*, 55:225–256, 1984.
- [32] L.P. Shilnikov. Some cases of generation of periodic motions in an  $n$ -dimensional space. *Soviet Math. Dokl.*, 3:394–397, 1962.

- [33] L.P. Shilnikov. A case of the existence of a countable number of periodic motions. *Soviet Math. Dokl.*, 6:163–166, 1965.
- [34] L.P. Shilnikov. On the generation of a periodic motion from a trajectory which leaves and re-enters a saddle-saddle state of equilibrium. *Soviet Math. Dokl.*, 7:1155–1158, 1966.
- [35] L.P. Shilnikov. On the generation of a periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type. *Math. USSR Sbornik*, 6:427–437, 1968.
- [36] L.P. Shilnikov. On a new type of bifurcation of multidimensional dynamical systems. *Soviet Math. Dokl.*, 10:1368–1371, 1969.
- [37] L.P. Shilnikov. A contribution to a problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type. *Math. USSR Sbornik*, 10:91–102, 1970.
- [38] M. Shub. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [39] D. Terman. The transition from bursting to continuous spiking in excitable membrane models. preprint, 1992.
- [40] C. Tresser. About some theorems by l.p. shilnikov. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 40:441–461, 1984.
- [41] A. Vanderbauwhede and B. Fiedler. Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 43:292–318, 1992.
- [42] S. Wiggins. *Global Bifurcations and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [43] E. Yanagida. Branching of double pulse solutions from single pulse solutions in nerve axon equations. *J. Diff. Eq.*, 66:243–262, 1987.